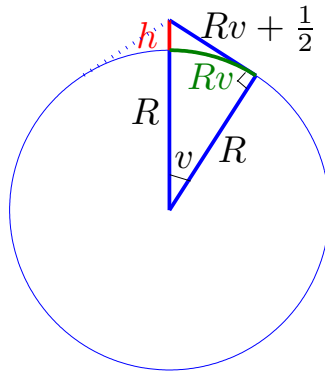


Att sträcka ett rep runt jorden.

Anta att vi har ett rep som är sträckt längs markytan ett varv runt jorden. Vi antar för enkelhets skull att jorden är perfekt klotformig med radien 6378 km (den radien stämmer på ekvatorn). Om vi förlänger repet med en meter, så kan vi dra i en punkt av repet och sträcka det rakt upp från jordytan tills det blir stopp. Hur högt måste vi dra repet? Detta är sträckan h markerad i figuren, som förstås inte kan vara skalenlig. Det är ju mycket svårt att göra rimlighetsbedömningar, så här behöver vi verkligen räkna!



Först kan vi uttrycka den sökta höjden h med hjälp av centrumvinkeln v :

$$\cos v = \frac{R}{R+h} \iff h = R\left(\frac{1}{\cos v} - 1\right)$$

För att få tag i vinkeln v har vi en ekvation att lösa. Innan vi ställer upp den, konstaterar vi att cirkelbågen som svarar mot centrumvinkeln v har längden Rv , och att den raka delen av repet är en halv meter längre (halva förlängningen finns här, den andra halvan på den andra rakan till vänster). Vi mäter då även R i meter. Då har vi vår ekvation:

$$\tan v = \frac{Rv + \frac{1}{2}}{R} \iff \tan v = v + \frac{1}{2R} \iff \tan v = v + \frac{1}{12756000}$$

Denna ekvation kan vi inte lösa analytiskt, men vi kan t. ex. använda Newtons metod.

Med den får vi då

$$v = 0,0061725797\dots$$

och sedan

$$h = 121,50519\dots$$

Den sökta höjden är alltså cirka **121,5 m**. Avståndet längs jordytan från den punkt där vi drar upp repet till den punkt där repet lättar från marken blir $vR \approx 39369 \text{ m} \approx 40 \text{ km}$.

Här ska också ges en annan lösningsvariant, som med fördel kan genomföras under nästa kurs, efter Taylors formel. Om man använder Taylors formel, kan man nämligen approximera de inblandade trigonometriska uttrycken med polynom. Hur detta går till får bli en extra övning. Vi får i alla fall

$$\frac{1}{\cos v} \approx 1 + \frac{v^2}{2} \text{ och } \tan v \approx v + \frac{v^3}{3},$$

vilket gör att man lätt löser tangensekvationen approximativt och därefter får ett approximativt uttryck för h . Räknar man rätt så blir det

$$v \approx \left(\frac{3}{2R}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,00617261 \text{ och } h \approx \left(\frac{9R}{32}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 121,504496$$

Felet i h beräknat med Taylorapproximationerna är knappt 0,7 mm! Vinkeln v är ju extremt liten, och Taylorapproximationerna är mycket bra så nära noll.