

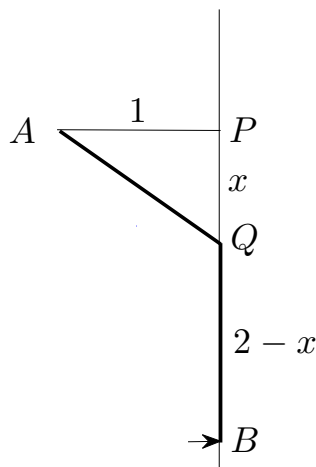
Ett roddproblem.

Detta problem är mycket likt Adams 4.8.21.

Man ska ta sig från en punkt A ute i en sjö till en punkt B på stranden. A är 1 km från närmaste punkten P på stranden, därifrån är det 2 km längs den rätlinjiga stranden till B. I punkten A sitter man i en roddbåt, vilken man kan ro med farten 3 km/h. På land går man med farten 5 km/h. Anta att man vill ro till en punkt Q mellan P och B med båten och därefter gå till B. Var ska Q väljas för att man ska komma fram så fort som möjligt?

Lösning:

Vi sätter avståndet mellan P och Q till x km. Då blir gångsträckan från Q till B $2-x$ km.



Roddsträckan från A till Q blir (med Pythagoras sats) $\sqrt{x^2 + 1}$ km. Den tid detta tar blir

$$f(x) = \frac{AQ}{3} + \frac{QB}{5} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3} + \frac{2-x}{5} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

timmar. För att söka minimum deriverar vi:

$$f'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{5}$$

Vi söker derivatans nollställe(n) och får snart ekvationen

$$5x = 3\sqrt{x^2 + 1} \tag{1}$$

För att lösa den kvadrerar vi båda leden, men observerar att vi därmed inkluderar ekvationen $-5x = 3\sqrt{x^2 + 1}$ (ger ju samma vid kvadrering!). Vi får

$$25x = 9(x^2 + 1) \tag{2}$$

Vi får två lösningar $x = \pm \frac{3}{4}$. Av tecknet inser vi att bara $x = \frac{3}{4}$ är lösning till $5x = 3\sqrt{x^2 + 1}$, medan $x = -\frac{3}{4}$ istället löser ekvationen $-5x = 3\sqrt{x^2 + 1}$ (förutom att vi inte hade varit intresserade av en negativ lösning!). Eftersom $f'(0) = -\frac{1}{5}$ och $f'(2) > 0$ (inses om man tittar på ekvationerna (1) och (2): om vänsterledet i dessa ekvationer är större än högerledet, så är $f'(x) > 0$), så har derivatan teckenväxlingen $- 0 +$ i punkten $x = \frac{3}{4}$. Detta visar att vi har funnit minimum av $f(x)$.

Sammanfattning: Tiden minimeras om man rör mot en punkt 750 m från P och sedan går längs stranden till B.