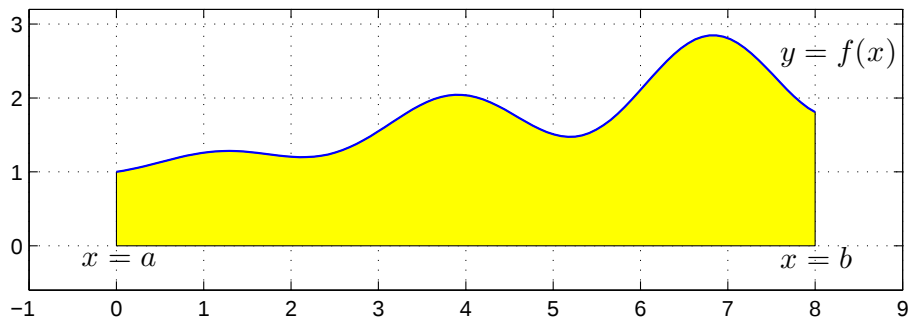


Laboration 1 – Integraler

Ibland kan man inte bestämma integraler exakt utan man får nöja sig med att beräkna approximationer. T.ex. $\int_0^1 e^{x^2} dx$ kan inte beräknas exakt, eftersom det inte finns någon användbar primitiv funktion. Det kan också vara så att integranden bara är känd i vissa punkter, t.ex. vi har en serie med mätdata.

Den geometriska tolkningen av integralen $\int_a^b f(x) dx$ är arean av ytan mellan grafen av integranden $y = f(x)$ och x -axeln, dvs. $y = 0$, mellan $x = a$ och $x = b$.



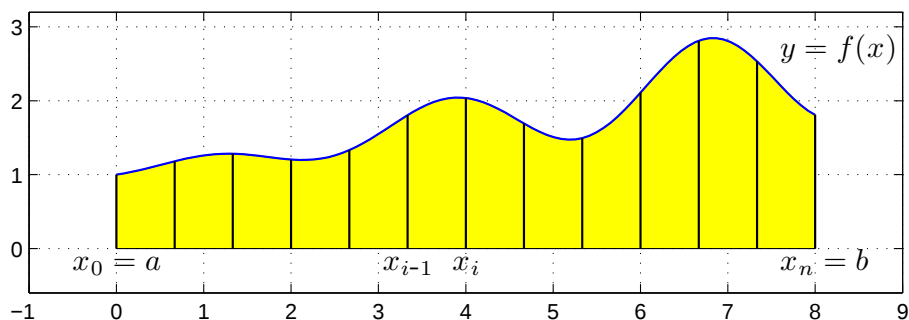
Vi gör en likformig indelning av intervallet $a \leq x \leq b$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

så att vi får n lika långa delintervall $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ med bredden $h = \frac{b-a}{n}$.

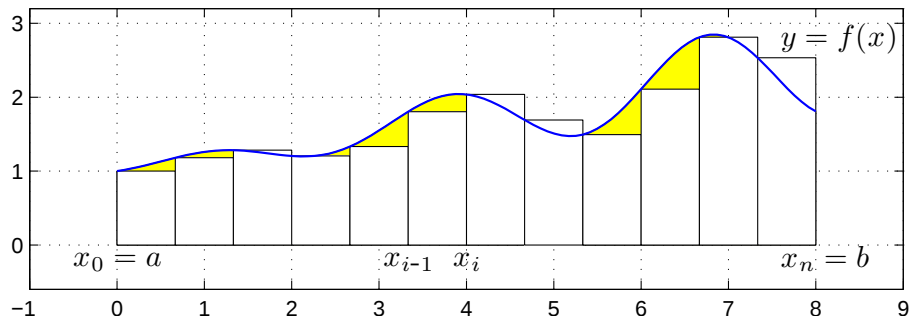
Sedan delar vi upp integralen i en summa av delintegraler över varje delintervall

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$



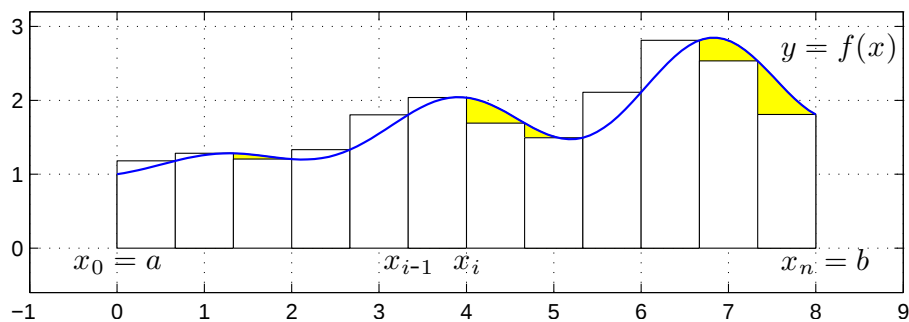
Om vi approximerar $f(x)$ med $f(x_{i-1})$ i intervallen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ får vi **vänster rektangelregel**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h f(x_{i-1})$$



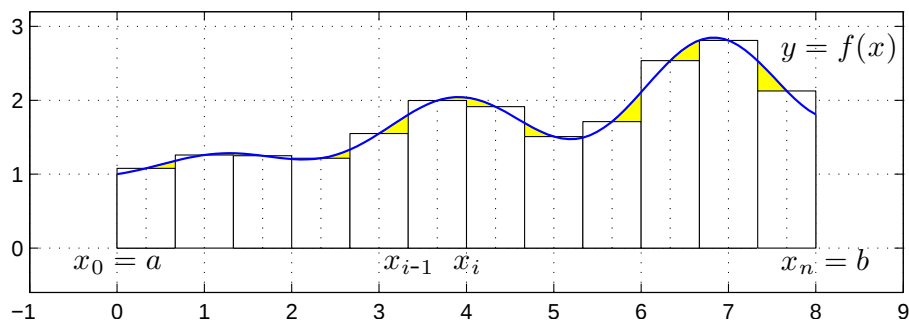
Om vi approximerar $f(x)$ med $f(x_i)$ i intervallen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ får vi **höger rektangelregel**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h f(x_i)$$



Om vi approximerar $f(x)$ med $f(m_i)$ i intervallen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, där m_i är mittpunkterna i intervallen, får vi **mittpunktsmetoden**

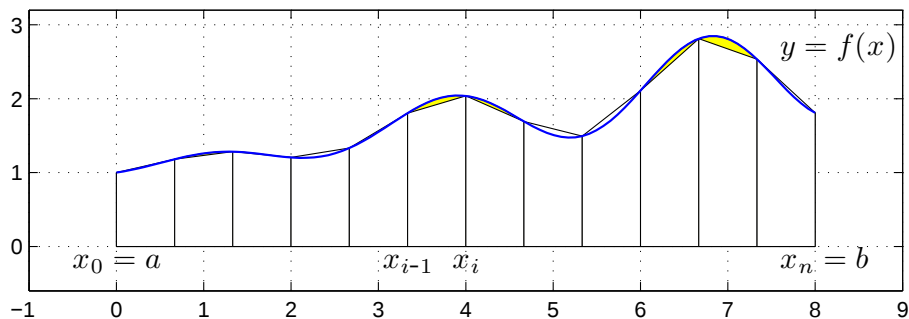
$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = \sum_{i=1}^n h f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$



Dessa olika varianter är alla Riemannsummor (med $c_i = x_{i-1}$, $c_i = x_i$ respektive $c_i = m_i$), se Adams 5.3.

Vi kan också approximera integralen med medelvärde av vänster och höger rektangelregel och får då **trapetsmetoden**

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$$



Antag att vi vill beräkna $\int_0^1 x \sin(x) dx$ med vänster rektangelregel med $n = 100$. Vi skulle kunna göra så här

```
>> n=100;
>> a=0; b=1; f=@(x)x.*sin(x);
>> h=(b-a)/n
>> q=0;
>> for i=0:n-1
        x=a+i*h;
        q=q+h*f(x);
    end
>> q
```

Att använda en **for**-sats är oftast inte effektivt i MATLAB. Vi genererar hellre en vektor av alla funktionsvärdena $f(x_i)$ och sedan summerar dessa enligt

```
>> n=100;
>> a=0; b=1; f=@(x)x.*sin(x);
>> x=linspace(a,b,n+1);
>> h=(b-a)/n;
>> q=sum(h*f(x(1:n)))
```

Detta sätt att organisera en beräkning kallas att vektorisera den, dvs. man genererar först en eller flera vektorer och utför sedan den önskade beräkningen på dem. De komponentvisa operationerna `.*` `./` `.^` är exempel på vektoriserade operationer. Vi använde funktionen **sum** som snabbt summerar en vektor.

Övning 1. Beräkna en approximation av integralen $\int_0^1 x \sin(x) dx$ med vänster och höger rektangelregel samt mittpunkts- och trapetsreglerna. Använd **sum**.

Övning 2. Skriv ett program `min_integral` med anropet `q=min_integral(f,I,n,k)` som beräknar en integral approximativt. På kurshemsidan finner du ett programskalet du kan utgå ifrån. In- och ut-variablerna förklaras i programskalet.

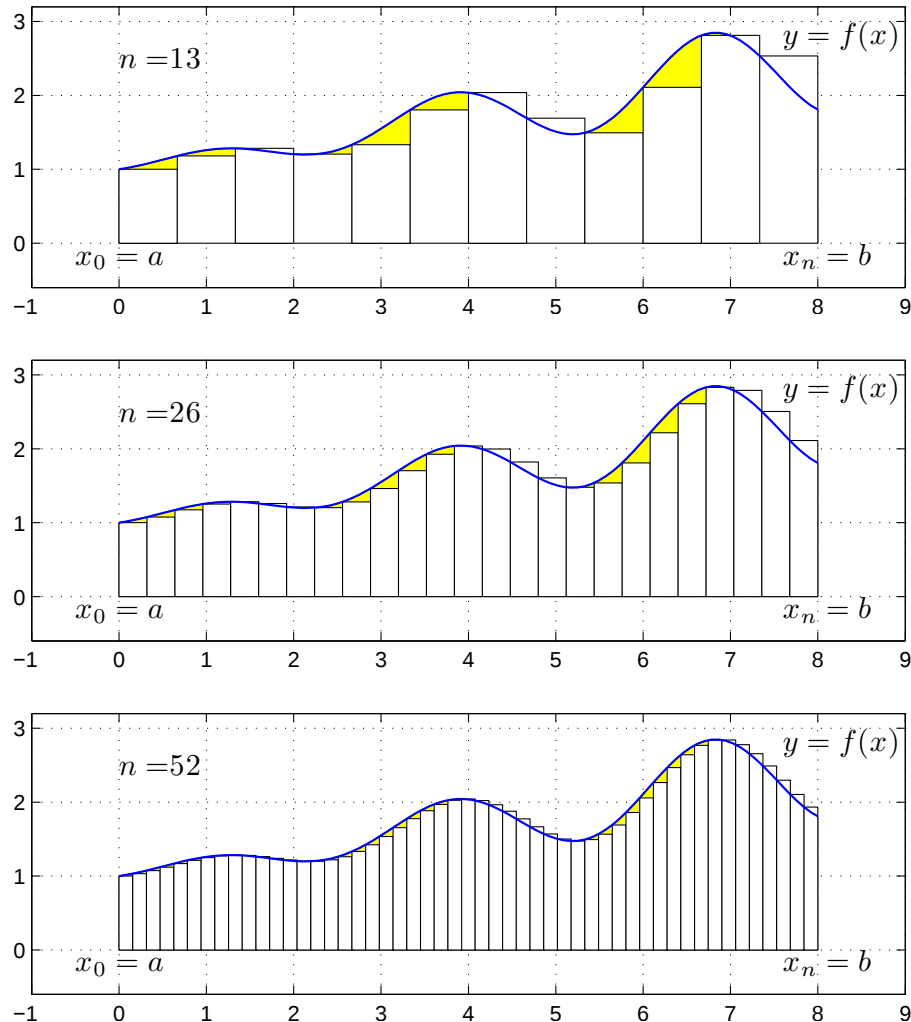
Övning 3. Testa ditt program `min_integral` på följande integraler. Variera $h = (b - a)/n$.

(a). $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

(b). $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

(c). $\int_0^1 \tan(\sqrt{x}) dx$

För metoderna ovan gäller att samtliga är konvergenta, dvs. låter vi antal delintervall n gå mot oändligheten så går approximationerna mot integralens värde. Vi ser på några bilder för vänster rektangelregel där n blir allt större



Vi ser att vi allt bättre täcker upp ytan under grafen med allt fler och smalare staplar.

Nu räcker det i praktiken inte med konvergens. Vi måste få en bra approximation på en kort tid, dvs. inte behöva ta n alltför stort.

För vänster och höger rektangelregel gäller att om vi fördubblar antal delintervall så halveras felet i approximationen av integralen. För mittpunkts- och trapetsmetoderna gäller vid samma fördubbling att felet delas med fyra, dvs. mycket bättre utdelning.

Övning 4. Vi ser på integralen $\int_0^1 x \sin(x) dx$ igen. Beräkna integralen exakt (för hand). Jämför exakt värde med de approximationer vi får med metoderna ovan för olika antal delintervall n . Hur stort blir felet? Tag t.ex först $n = 50$ och sedan $n = 100$, beräkna felen i approximationerna och se efter hur felen förändras.

Färdiga program i MATLAB

Det finns färdiga funktioner i MATLAB för att integrera, se Jönsson avsnitt 13.4. En sådan funktion är `quadl`¹. Om vi skulle använda `quadl` för att beräkna integralen i övning 1 skulle det kunna se ut så här

```
>> a=0; b=1; f=@(x)x.*sin(x);  
>> q=quadl(f,a,b)
```

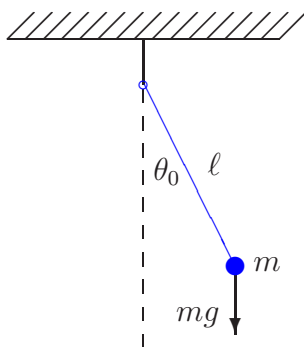
Övning 5. Gör övning 17 i Adams 5.7. Rita en bild av området. Använd `quadl`.

Övning 6. Beräkna arean av det slutna området mellan graferna till funktionerna

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{och} \quad h(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Rita en bild av området. Använd `fzero` och `quadl`. (Förra läsperioden löste ni ekvationer av typen $f(x) = 0$. Funktionen `fzero` är gjord för att lösa sådana ekvationer. Läs hjälptexten i MATLAB för att se hur den används.)

Övning 7. Den matematiska pendeln. En masspunkt med massan m hänger i en viktlös smal stav av längden ℓ . Vi vill för olika begynnelseutslag θ_0 bestämma pendelns periodlängd.



Periodlängden ges av formeln

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\theta)}}$$

där integralen är en s.k. elliptisk integral som saknar användbar primitiv funktion.

Låt $\ell = 0.1$ m och tag begynnelseutslagen $\theta_0 = 10^\circ, 30^\circ, \dots, 170^\circ$. Beräkna en approximation av periodlängden för de olika begynnelseutslagen. Rita en graf av T som funktion av θ_0 . Använd funktionen `quadl`.

¹Namnet `quadl` kräver en förklaring. Att beräkna integralen numeriskt kallas *numerisk kvadratur* (numerical quadrature) och en metod för numerisk kvadratur brukar kallas *kvadraturregel* (quadrature rule). Namnet kvadratur syftar på areaberäkning, dvs. att finna en kvadrat som har samma area som en given yta i planet. Vidare står I för Lobatto, en holländsk 1800-tals matematiker som bl.a. arbetade med kvadratur.