

Lösning. Tentamen. TMV130 2010 12 15

1.

$$(a) \int_1^{\sqrt{2}} x(1+x^2)^3 dx = \left[x \mapsto t = 1+x^2, dt = 2x dx; 1 \mapsto 2, \sqrt{2} \mapsto 3 \right] = \frac{1}{2} \int_2^3 t^3 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_2^3 = \frac{65}{8}$$

$$\begin{aligned} (b) \int x \sin^2 x dx &= \int x \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int (x - x \cos 2x) dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - x \sin 2x) - \frac{1}{8} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$$(c) \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(1+x)} = [PBU] = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} = [ekv. sys] = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

$$\int \frac{1}{x+x^2} dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' = (y^2 - 1)x^2, \quad y(0) = 2.$$

Lsn. Omskrivning:

$$\frac{1}{y^2 - 1} dy = x^2 dx,$$

som är separabel. $\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = [PBU] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right)$. Sep. integration:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\frac{y-1}{y+1} = C e^{\frac{2}{3} x^3}, \quad y = (1 + C e^{\frac{2}{3} x^3}) / (1 - C e^{\frac{2}{3} x^3}).$$

Av BV får vi $C = \frac{1}{3}$. Observera att omskrivningen, dvs att dela med $y^2 - 1$ är inte alltid tillåtet eftersom $y^2 - 1$ kan vara 0. I så fall är $y = \pm 1$, som ej uppfyller BV.

Svar:

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3} e^{\frac{2}{3} x^3}}{1 - \frac{1}{3} e^{\frac{2}{3} x^3}}.$$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Lsn. $y = y_h + y_p$ och bestäm först y_h . Lös $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, $\lambda = 1, 3$. $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. Ansats: $y_p = C x e^x$. $y'_p = C e^x + C x e^x$, $y''_p = 2C e^x + C x e^x$.

$$y''_p - 4y'_p + 3y_p = 2C e^x + C x e^x - 4C e^x - 4C x e^x + 3C x e^x = -2C e^x + (1 - 4 + 3)C x e^x = -2C e^x$$

Insättning ger $C = -1$. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x e^x$. Lös BV. $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Svar $y = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{3x} - x e^x$.

4. Beräkna den volym som erhålls då området i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av $y = \sqrt{x} e^x$, $y = 0$ och $x = 1$, roteras kring x -axeln.

Lsn. Skärningspunkten mellan kurvan $y = \sqrt{x} e^x$ och $y = 0$ är $(x, y) = (0, 0)$. Området är $y \leq \sqrt{x} e^x$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned} Vol &= \int_0^1 \pi (\sqrt{x} e^x)^2 dx = \int_0^1 \pi x e^{2x} dx \\ &= [PI] = \pi \left(\left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx \right) = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 + 1) \end{aligned}$$

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x \arctan x}{(1 - \cos x)(e^x - 1 - x)}.$$

Lsn.

$$(1 - \cos x)(e^x - 1 - x) = [Macl.seriier] = \left(\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) = \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

$$\ln(1+x^2) - x \arctan x = \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^6)\right) - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)\right) = -\frac{1}{6}x^4 + O(x^6)$$

$$\frac{\ln(1+x^2) - x \arctan x}{(1 - \cos x)(e^x - 1 - x)} = \frac{-\frac{1}{6}x^4 + O(x^6)}{\frac{1}{4}x^4 + O(x^5)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{\frac{1}{4} + O(x)}$$

som har gränsv.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x \arctan x}{(1 - \cos x)(e^x - 1 - x)} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}$$

6. Bestäm integralen $I = \int e^{ax} \cos(bx) dx$. ($a \neq 0$ och $b \neq 0$ är konstanter.)

Lsn.

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \cos(bx) dx = [PI] = \frac{1}{a}e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' \sin(bx) dx \\ &= [PI] = \frac{1}{a}e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} \sin(bx) - \int \frac{b}{a} e^{ax} \cos(bx) dx\right) + C \\ &= \frac{1}{a}e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2}I + C \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{1}{a}e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax} \sin(bx) + C$$

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}(a \cos(bx) + b \sin(bx))e^{ax} + C$$

7. (a) Formulera begreppet **konvergens** för en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ge exempel på en konvergent och en divergent serie.

(b) Formulera Integralkalkylens **Medelvärdessats (Mean-Value Theorem for Integrals)**.

(a) Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent om delsummorna $\sum_{n=1}^N a_n$ har ett gränsvärde när $N \rightarrow \infty$, dvs om $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$ existerar. Ex. Konvergent serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$. Div. serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (10)^n$. (b) Se boken.

8. För vilket x har funktionen

$$F(x) = \int_0^{x^2-2x} \frac{1}{1+t^4} dt$$

det minsta respektive största värdet (i fall det existerar)?

Lsn. Enligt Analysens Huvudssats och kedjeregeln, $F'(x) = \frac{1}{1+(x^2-2x)^4}(2x-2)$. Lös $F'(x) = 0$. Få $x = 1$. Men $F'(x) > 0$ när $x > 1$ och $F'(x) < 0$ när $x < 1$ dvs $F(x)$ antar sitt minsta värdet i $x = 1$. Ingen maximumpunkt. Svar: $x = 1$ minimumpunkt.