Lösningsförslag till övningstentamen 1

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

111214 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Beräkna arean av den rotationsyta som bildas då kurvan $y = \sqrt{x+1}$, $0 \leq x \leq 2$, roterar kring x-axeln. (6p)

Lösning: Båglängdselementet är $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{x+1}}\,dx$ så;

$$\text{Arean} = \int_0^2 2\pi\sqrt{x+1}\,ds = \int_0^2 \pi\sqrt{4x+5}\,dx = \pi\left[\frac{1}{6}(4x+5)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}\left(13^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

Svar: Arean av rotationsytan är $\dfrac{\pi}{6}\left(13^{3/2} - 5^{3/2}\right)$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 20\cos 2x \\ y(0) = 0 \ ,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ (6p)

Lösning: Differentialekvationens karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 8 = 0$ har lösningarna $r = 1 \pm \sqrt{1+8} \ \Leftrightarrow\ r = 4$ eller $r = -2$, så homogenlösningarna har formen

$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$$

Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$. Vi har; $y_p'' - 2y_p' - 8y_p = ... = (-12A - 4B)\cos 2x + (-12B + 4A)\sin 2x$ så för att det skall ge en lösning så måste vi ha;

$$\begin{cases} -12A - 4B = 20 \\ -12B + 4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Differentialekvationens allmänna lösning är således

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

Begynnelsevillkoren ger sedan att;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 0 \\ 4C_1 - 2C_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Svar: Begynnelsevärdesproblemet har lösningen $y = \frac{2}{3}e^{4x} + \frac{5}{6}e^{-2x} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

4. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{2011} \frac{1+3^k}{3^{k+1}}$ (4p)

Lösning:

$$\sum_{k=1}^{2011} \frac{1+3^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{2011}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2011} 1 = \frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2011}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}2011 = \frac{1}{2}\left(1341 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2012}\right)$$

Svar: $\frac{1}{2}\left(1341 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2012}\right)$

(b) Avgör om $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{3^{k+1}}$ är konvergent eller divergent (motivering krävs!) (2p)

Svar: Divergent, ty termerna går inte mot 0.

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. I ett nyvädrat rum med volymen 120 m^3 börjar några personer att röka. Röken sprider sig i en takt av 0.01 m^3/min och den välblandade rökluften lämnar rummet i samma takt och ersätts med ren luft genom ventilation med samma takt 0.01 m^3/min. Röken innehåller 4 % av den hälsovådliga gasen CO. Bestäm halten av gasen CO som funktion av tiden. Efter hur lång tid nås det hälsovådliga värdet 0.012 % ? (6p)

Lösning: Låt $y(t)$ vara koncentrationen (i procent) koloxid (CO) i rummet t min efter det att personerna börjat röka. Vi vet då att $y(0) = 0$. Förändringshastigheten för $y(t)$ (dvs. derivatan) är differensen mellan tillskott och bortfall.

Tillskottet från rökandet är $\dfrac{0.01 \cdot 0.04}{120}$ procentenheter per minut, och

bortfallet p.g.a. ventilation är $\dfrac{0.01\,y(t)}{120}$ procentenheter per minut.

Detta ger oss begynnelsevärdesproblemet;

$$y'(t) = \frac{0.01 \cdot 0.04}{120} - \frac{0.01\,y(t)}{120} \quad , \quad y(0) = 0$$

Differentialekvationen är linjär och kan skrivas;

$$y'(t) + \frac{1}{12000}y(t) = \frac{0.04}{12000} \qquad (DE)$$

Den integrerande faktorn är $e^{\int \frac{1}{12000}\,dt} = e^{\frac{t}{12000}}$ så ;

$$(DE) \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{12000}}y(t)\right) = \frac{0.04}{12000}e^{\frac{t}{12000}} \ \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{t}{12000}}y(t) = 0.04\,e^{\frac{t}{12000}} + C \ \Leftrightarrow \ y(t) = 0.04 + Ce^{\frac{-t}{12000}}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger sedan att $C = -0.04$ så

$$y(t) = 0.04(1 - e^{\frac{-t}{12000}})$$

Vi vill nu också bestämma den tidpunkt T för vilket koloxidhalten $y(t)$ nått den farliga nivån 0.00012;

$$0.04(1 - e^{\frac{-T}{12000}}) = 0.00012 \Leftrightarrow 1 - e^{\frac{-T}{12000}} = 0.003 \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{-T}{12000}} = 0.997 \Leftrightarrow T = -12000 \ln 0.997$$

Svar: Halten koloxid t minuter efter det att personerna börjat röka är $0.04\,(1 - e^{\frac{-t}{12000}})$ och efter $-12000 \ln 0.997$ (≈ 36) minuter så har halten nått den hälsovådliga nivån.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska, samt motivera dina svar (rätt svar utan motivering ger inga poäng).

(a) Det finns konstanter A, B, C så att

$$\frac{x^2+x+1}{2x^3+3x^2-3x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1} \quad , \quad \text{för alla } x \neq -2, -\frac{1}{2}, 1$$ (2p)

Svar: Sant, ty med $A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{1}{3}$ så är VL=HL.

(b) Linjen $y = x$ är en ortogonalkurva till kurvskaran $xy = C$. (2p)

Svar: Sant, ty kurvskaran kan betraktas som lösningarna på differentialekvationen $xy' + y = 0$ och $y = x$ är lösning på differentialekvationen $\frac{-x}{y'} + y = 0$ som ger ortogonalkurvorna.

(c) Potensserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k$ konvergerar för alla $x \in [0, 2]$ (2p)

Svar: Falskt, ty serien konvergerar inte för $x = 2$ (den konvergerar dock för alla andra x i intervallet).

7. Antag att $P_n(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad n för funktionen $f(x)$ och att $f(x) = Q_n(x) + O(x^{n+1})$ för något polynom $Q_n(x)$ av grad högst n.
Visa då att $Q_n(x) = P_n(x)$ för alla x. (med $O(x^{n+1})$ menas stora ordo av x^{n+1}) (6p)

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange en Riemannsumma för $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$ på intervallet $[2,4]$ (2p)

Lösning: En Riemannsumma för funktionen $f(x)$ på intervallet $[2,4]$ har formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

där $2 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 4$ och $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, för $i = 1, ..., n$.
Med $n = 2$ och $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4$, samt $c_1 = 3, c_2 = 4$, så får vi speciellt;

$$\sum_{i=1}^{2} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(3)(3-2) + f(4)(4-3) = \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{4}{18}\cdot 1 \quad (= \frac{47}{90} \approx 0.52)$$

Svar: t.ex. $\dfrac{3}{10}\cdot 1 + \dfrac{4}{18}\cdot 1$

(b) Bestäm $f'(2)$ då $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \ln(1+t^2)\,dt$ (3p)

Lösning: Analysens huvudsats ger att;

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_x^1 \ln(1+t^2)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x \ln(1+t^2)\,dt\right) = -\ln(1+x^2)$$

Svar: $f'(2) = -\ln 5$

(c) Bestäm $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ (3p)

Lösning: Partiell integration ger att;

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Svar: $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

(d) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} x^2y' = 1+y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ (3p)

Lösning: Differentialekvationen är separabel och vi får;

$$x^2y' = 1+y^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{1+y^2} = \frac{dx}{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{dx}{1+y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}\,dx \quad\Leftrightarrow\quad \arctan y = \frac{-1}{x} + C$$

Begynnelsevillkoret ger sedan att; $\underbrace{\arctan 0}_{=0} = \dfrac{-1}{1} + C \Rightarrow \quad C = 1$

Svar: $y = \tan(1 - \dfrac{1}{x})$

(e) Bestäm Taylorpolynomet av grad 4 kring $x = 1$ för funktionen $f(x) = \cos(\pi x)$ (3p)

Lösning: Vi har
$f'(x) = -\pi\sin(\pi x), f''(x) = -\pi^2\cos(\pi x), f^{(3)}(x) = \pi^3\sin(\pi x), f^{(4)}(x) = \pi^4\cos(\pi x)$
och speciellt är $f(1) = -1, f'(1) = 0, f''(1) = \pi^2, f^{(3)}(1) = 0, f^{(4)}(1) = -\pi^4$ så;
$P_4(x) = -1 + 0(x-1) + \frac{\pi^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{0}{3!}(x-1)^3 + \frac{-\pi^4}{4!}(x-1)^4$
Alternativt kan vi utnyttja den kända Maclaurinutvecklingen av $\cos x$ enligt följande;
$\cos(\pi x) = \cos(\pi(x-1)+\pi) = -\cos(\pi(x-1)) = -1 + \frac{(\pi(x-1))^2}{2} - \frac{(\pi(x-1))^4}{24} + O((x-1)^6)$

Svar: Taylorpolynomet är $P_4(x) = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 - \frac{\pi^4}{24}(x-1)^4$