

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för V/AT1, TMV130

2009 08 21 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefon: Jonatan Vasilis, 0762 72 18 61

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng. Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

-
1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - y = e^x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$. (6p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 1$. (6p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ $y(0) = \frac{1}{6}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ (6p)

4. (a) Beräkna $\int_0^1 2x \arctan x \, dx$. (4p)

- (b) Beräkna $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} \, dx$ (4p)

5. Betrakta funktionen $f(x) = (1 - \cos x^3) \ln(1 + x^3)$. (6p)

(a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 15 till f .

(b) Beräkna derivatorna $f^{(n)}(0)$ för $1 \leq n \leq 15$

6. Kalkylen (6p)

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{(2x+1)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2x+1} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

är uppenbarligen felaktig, eftersom integranden är positiv. Vad är felet?
Hur borde man ha behandlat integralen och vad blir resultatet?

7. En kropp fyller upp området $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, dvs tetraedern med hörn i punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Kroppens densitet i (x, y, z) är $z \, \text{kg/m}^3$. Beräkna dess massa. (6p)

8. Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^3 - a_n^3)$ är konvergent om och endast om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar. (6p)