# Lösningsförslag till tentamen
# TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1
### 121219 kl. 8.30–12.30

**Examinator:** Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Dawan Mustafa, telefon: 0703 088 304

**Hjälpmedel:** bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

**Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.**

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

## Godkäntdelen

**1.** Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

**Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.**

**2.** (a) Bestäm längden av funktionskurvan $y = x^{3/2}$ , $0 \le x \le 1$. (3p)

**Lösning:** Längden kan beräknas enl.

$$\int_C ds = \int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{1/2})^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{8}{27}(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$$

**Svar:** Funktionskurvan har längden $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ (längdenheter)

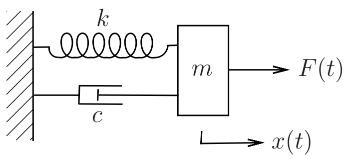
(b) Bestäm volymen av den kropp som bildas då området
$D: \ 0 \le y \le x^{3/2}$ , $0 \le x \le 1$ , roterar kring $x$-axeln. (3p)

**Lösning:** Volymen kan beräknas enl.

$$\int_0^1 \pi (x^{3/2})^2\, dx = \pi \int_0^1 x^3\, dx = \pi \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

**Svar:** Rotationskroppen har volymen $\frac{\pi}{4}$ (volymsenheter)

**3.** Rörelsen hos en kropp (med massa $m$) som är kopplad till en fix punkt via en fjäder (med fjäderkonstant k) och påverkad av en dämpare (med dämpkonstant c), samt ytterligare en kraft $F(t)$ (se figur), kan beskrivas med differentialekvationen;




$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

där $x(t)$ är kroppens avvikelse från jämviktsläget vid tiden $t$.

Bestäm $x(t)$ då $m = 1, k = \frac{1}{4}, c = \frac{4}{5}, F(t) = \frac{5}{4}t$ och $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. (6p)

**Lösning:** Differentialekvationen är linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter och dess karakteristiska ekvationen $r^2 + \frac{4}{5}r + \frac{1}{4} = 0$ har rötterna

$$r_{1,2} = -\frac{2}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{2}{5} \pm \frac{3}{10}i$$

så tillhörande homogena differentialekvation har lösningarna $x_h = e^{-\frac{2}{5}t}\left(C_1 \cos \frac{3}{10}t + C_2 \sin \frac{3}{10}t\right)$. Som partikulärlösning ansätter vi $x_p = At + B$ som insatt i differentialekvationens vänsterled ger;

$$x_p'' + \frac{4}{5}x_p' + \frac{1}{4}x_p = \frac{4}{5}A + \frac{1}{4}(At + B) = \frac{1}{4}At + \frac{4}{5}A + \frac{1}{4}B$$

För att detta skall ge en lösning måste vi ha;

$$\begin{cases} \frac{1}{4}A = \frac{5}{4} \\ \frac{4}{5}A + \frac{1}{4}B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -16 \end{cases}$$

så en partikulärlösning är $x_p = 5t - 16$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen ges därför av;

$$x = x_h + x_p = e^{-\frac{2}{5}t}\left(C_1 \cos \frac{3}{10}t + C_2 \sin \frac{3}{10}t\right) + 5t - 16$$

Begynnelsevillkoren ger att;

$$\begin{cases} C_1 - 16 = 1 \\ -\frac{2}{5}C_1 + \frac{3}{10}C_2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 17 \\ C_2 = 6 \end{cases}$$

så kroppens rörelse beskrivs av;

**Svar:** $x(t) = e^{-\frac{2}{5}t}\left(17 \cos \frac{3}{10}t + 6 \sin \frac{3}{10}t\right) + 5t - 16$

**4.** (a) Bestäm Taylorpolynomet $p_2(x)$ av grad 2, kring $x = 1$, för funktionen $f(x) = \arctan x$. (3p)

**Lösning:** Vi har;

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

och speciellt är $f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ , $f'(1) = \frac{1}{2}$ , $f''(1) = -\frac{1}{2}$ så;

**Svar:** $p_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{4}(x - 1)^2$

(b) Visa att $f(x) \geq p_2(x)$ då $x \geq 1$ genom att studera tecknet på resttermen $E_2(x) = f(x) - p_2(x)$ i deluppgift (a). (3p)

**Lösning:** Vi har;

$$f'''(x) = \frac{-2}{(1 + x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

så

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x - 1)^3 = \frac{6s^2 - 2}{6(1 + s^2)^3}(x - 1)^3$$

där $s$ ligger mellan 1 och $x$.

Om $x \geq 1$ så är även $s \geq 1$ och vi får att;

$$E_2(x) = \underbrace{\frac{6s^2 - 2}{6(1 + s^2)^3}}_{\geq 0} \underbrace{(x - 1)^3}_{\geq 0} \geq 0$$

varpå det följer att $f(x) \geq p_2(x)$

## Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

**5.** En tank innehåller från början 1000 liter rent vatten. Vid en viss tidpunkt börjar man pumpa in saltvatten i tanken med hastigheten 10 liter per minut. Samtidigt töms tanken på sin saltlösning i samma takt, så den totala mängden saltlösning i tanken är hela tiden 1000 liter. Antag att koncentrationen salt i inflödet är 35 gram per liter och att saltlösningen i tanken blandas så effektivt att koncentrationen salt, vid varje tidpunkt, är densamma överallt i tanken. Din uppgift är att bestämma en funktion som beskriver hur mängden salt i tanken varierar med tiden. Efter lång tid kommer saltkoncentrationen i tanken att vara ungefär densamma som i inflödet. Kontrollera att detta stämmer med din funktion. (6p)

**Lösning:** Om $y(t)$ är mängden salt i tanken (mätt i gram) vid tiden $t$ så får vi att;

$$y'(t) = \overbrace{\underbrace{35}_{\text{konc.}} \cdot \underbrace{10}_{\text{hast.}}}^{\text{inflöde}} - \overbrace{\underbrace{\frac{y}{1000}}_{\text{konc.}} \cdot \underbrace{10}_{\text{hast.}}}^{\text{utflöde}}$$

dvs. differentialekvationen $y' + \dfrac{1}{100}y = 350$. Multiplicerar vi båda led i denna ekvation med den integrerande faktorn $e^{\int \frac{1}{100}\,dt} = e^{t/100}$ så får vi;

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/100}y\right) = 350e^{t/100} \;\Leftrightarrow\; e^{t/100}y = 35000e^{t/100} + C \;\Leftrightarrow\; y = 35000 + Ce^{-t/100}$$

Eftersom $y(0) = 0$ så följer att $C = -35000$, vilket ger oss att;

$$y(t) = 35000(1 - e^{-t/100})$$

Vi noterar speciellt att;

$$\frac{y(t)}{1000} = 35(1 - e^{-t/100}) \to 35 \quad , \quad t \to \infty$$

så koncentrationen salt i tanken efter lång tid kommer vara ca. 35 gram per liter, vilket översenstämmer med koncentrationen i inflödet.

**6.** Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar.
(rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\,dx < \frac{1}{2}$ (2p)

**Svar och motivering:** Sant ty;

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \leq \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

Här har vi använt att $\sin t \leq t$, för $0 \leq t \leq 1$, vilket är känt från tidigare kurs eller kan inses med Tayloruyveckling; $\sin t = t - \frac{\sin s}{2}t^2$

Alternativt kan vi använda att $x^2 \leq x$ då $0 \leq x \leq 1$ och göra uppskattningen;

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \leq \int_0^1 \sin x\,dx = [-\cos x]_0^1 = 1 - \cos 1 < 1 - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) Lösningarna till differentialekvationen $(x^2 + y^2)y' + 2xy = 0$ beskrivs implicit av ekvationen $y^3 + 3x^2y = C$ (2p)

**Svar och motivering:** Sant ty;

$$y^3+3x^2y = C \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left(y^3 + 3x^2y\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3y^2y'+3x^2y'+6xy = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2+y^2)y'+2xy = 0$$

Differentialekvationen råkar också gå att lösa genom att göra substitutionen $z = y/x$, men det blir en betydligt längre väg att gå och lämnas för den intresserade att verifiera.

(c) Serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ är betingat konvergent. (2p)

**Svar och motivering:** Sant, ty med $a_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ så är;

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ inte absolutkonvergent ty vi vet från kursen att serier av typen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ är divergenta då $p < 1$.
- $a_{k+1}a_k < 0$ , för $k \geq 1$ (alternerande)
- $|a_{k+1}| < |a_k|$ , för $k \geq 1$ ($|a_k|$ är avtagande)
- $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

**7.** (a) Beskriv kort hur Riemannintegralen definieras (förklara ev. beteckningar du använder/anger). (4p)

(b) Förklara vad som menas med en Riemannsumma (ange den allmänna formen för en sådan summa). (2p)

Lycka till!
Thomas W

| Anonym kod | TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 121219 | sid nr. 1 | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

**1**. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ge exempel på en konvergent geometrisk serie och beräkna dess värde. (2p)

**Lösning:** En geometrisk serie $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ är konvergent med värdet $\dfrac{a}{1-r}$ då $|r| < 1$.

T.ex. har vi;

**Svar:** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(b) Beräkna $\int_2^3 \dfrac{x+1}{x^2-x}\, dx$ (3p)

**Lösning:**

$$\int_2^3 \frac{x+1}{x^2-x}\, dx = \int_2^3 \frac{x+1}{x(x-1)}\, dx = \int_2^3 \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= [2\ln(x-1) - \ln x]_2^3 = 3\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3}$$

**Svar:** $\int_2^3 \dfrac{x+1}{x^2-x}\, dx = \ln\dfrac{8}{3}$

(c) Beräkna $\int_0^{\infty} te^{-t}\, dt$ (3p)

**Lösning:** Med partiell integration får vi att;

$$\int te^{-t}\, dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\, dt = -te^{-t} - e^{-t} + C$$

så

$$\int_0^{\infty} te^{-t}\, dt = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$$

**Svar:** $\int_0^{\infty} te^{-t}\, dt = 1$

(d) Lös differentialekvationen $x^2y' = y+1$ med lösningsmetoden för separabla differentialekvationer (redovisa alla steg och ange lösningen på explicit form). (3p)

**Lösning:**

$$x^2y' = y+1 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x^2} \;\Leftrightarrow\; \int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{dx}{x^2} \;\Leftrightarrow\; \ln|y+1| = \frac{-1}{x} + D$$

$$|y+1| = e^{-1/x+D} \;\Leftrightarrow\; y+1 = \underbrace{\pm e^D}_{C} e^{-1/x} \;\Leftrightarrow\; y = Ce^{-1/x} - 1$$

**Svar:** $y = Ce^{-1/x} - 1$

(e) Lös differentialekvationen $x^2y' = y+1$ med lösningsmetod för linjära differentialekvationer av första ordningen (redovisa alla steg och ange lösningen på explicit form). (3p)

**Lösning:** Differentialekvationen kan skrivas om på formen;

$$y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicerar vi båda led med den integrerande faktorn $e^{\int -1/x^2\, dx} = e^{1/x}$ får vi;

$$\frac{d}{dx}\left(e^{1/x}y\right) = \frac{1}{x^2}e^{1/x} \;\Leftrightarrow\; e^{1/x}y = -e^{1/x} + C \;\Leftrightarrow\; y = Ce^{-1/x} - 1$$

**Svar:** $y = Ce^{-1/x} - 1$