Lösningsförslag till tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

130405 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jacob Leander, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

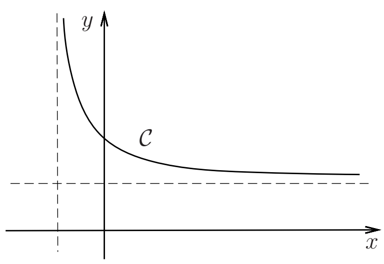
1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Betrakta den plana kurva $\mathcal{C}$ som ges av parametriseringen $\begin{cases} x = 1/t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases}, \quad 0 < t < \infty.$

(a) Skissa kurvan $\mathcal{C}$ och ange eventuella asymptoter (enbart plottning ger inga poäng men kan utföras som kontroll). (3p)

Lösning/Skiss: Sambanden ger att $y = \frac{1}{x+1} + 1$, $-1 < x < \infty$, varpå man enkelt avläser kurvans utseende. För att tydliggöra vad som händer då $x \to -1^-$ resp $x \to \infty$ (och som stödlinjer) ritar vi även in kurvans asymptoter $y = 1$ och $x = -1$;



(b) Skriv upp en integral som ger längden av den del av kurvan $\mathcal{C}$ som motsvarar parametervärdena $0.5 \le t \le 1$ (obs! integralen behöver inte beräknas). (3p)

Lösning: Vi har $x'(t) = -1/t^2$ och $y'(t) = 1$ så båglängdselementet är

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \sqrt{\frac{1}{t^4} + 1}\, dt$$

och därmed är;

Svar: Längden av kurvbiten $= \displaystyle\int_{0.5}^{1} \sqrt{\frac{1}{t^4} + 1}\, dt$

3. Antag att en jästkultur växer med en hastighet som är proportionell mot mängden jäst och att mängden jäst fördubblas på 3 timmar. Inför lämpliga beteckningar och ställ upp en differentialekvation som beskriver jästkulturens förändring. Lös sedan differentialekvationen steg för steg med lämplig metod och använd uttrycket på lösningen för att avgöra hur många gånger större jästkulturen blir på 1 dygn? (6p)

Lösning: Om $y(t)$ betecknar mängden jäst t timmar efter en given startpunkt så ger informationen i uppgiften att $y'(t) = ky(t)$ för någon proportionalitetskonstant k. Denna differentialekvation är både separabel och linjär av första ordningen och har den allmänna lösningen $y(t) = Ce^{kt}$ (dvs. exponentiell tillväxt) ty;

$$y'(t) = ky(t) \Leftrightarrow y'(t) - ky(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-kt}\left(y'(t) - ky(t)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-kt}y(t)\right) = 0 \Leftrightarrow e^{-kt}y(t) = C \Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}$$

Vidare ger informationen i uppgiften att;

$$2 = \frac{y(t+3)}{y(t)} = \frac{Ce^{k(t+3)}}{Ce^{kt}} = e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln 2$$

Detta ger sedan att;

$$\frac{y(t+24)}{y(t)} = \frac{Ce^{k(t+24)}}{Ce^{kt}} = e^{24k} = 2^8 = 256$$

så;

Svar: Jästkulturen blir 256 gånger så stor efter 1 dygn.

4. Låt $a_k = 2 + (\frac{-1}{2})^k$.

(a) Avgör om talföljden $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är konvergent eller divergent (motivering krävs!). (1p)

Svar: Talföljden är konvergent med gränsvärdet 2 ty $(\frac{-1}{2})^k \to 0$ då $k \to \infty$.

(b) Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k$ (4p)

Lösning:

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{100}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{100} 2 + \sum_{k=1}^{100}\left(\frac{-1}{2}\right)^k = 200 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{99}\left(\frac{-1}{2}\right)^k =$$

$$= 200 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\frac{-1}{2})^{100} - 1}{\frac{-1}{2} - 1} = 200 + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^{100} - 1\right)$$

Svar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k = 200 + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^{100} - 1\right)$

(c) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent eller divergent (motivering krävs!). (1p)

Svar: Serien är divergent ty seriens termer går inte mot 0 ($a_k \to 2$)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Beräkna integralen $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$ genom ett gränsvärde av Riemannsummor;

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \qquad (6p)$$

(Tips: välj t.ex. indelningspunkterna $x_k = 4^{k/n}$)

Lösning: Med $f(x) = \frac{1}{x}$ och $x_k = c_k = 4^{k/n}$ har vi;

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 4^{-k/n}\left(4^{k/n} - 4^{(k-1)/n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - 4^{-1/n}\right) =$$

$$= n\left(1 - 4^{-1/n}\right) = \frac{4^{-1/n} - 1}{-1/n} \to \ln 4\ , \quad \text{då } n \to \infty$$

ty l'Hospitals regel ger att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x - 1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4^x \ln 4}{1} = \ln 4$$

Svar: $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln 4$

(Anm. integralen kan även lätt beräknas med Analysens huvudsats vilket bekräftar svaret)

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och $f(x) \geq 0$ så är

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad (2p)$$

Svar: Påståendet är falskt, ty t.ex. är $\int_0^2 \sqrt{1}\,dx = 2 \neq \sqrt{2} = \sqrt{\int_0^2 1\,dx}$

(b) Alla lösningar till differentialekvationen $y' = -1 - y^4$ är avtagande funktioner. (2p)

Svar: Påståendet är sant, ty en lösning till differentialekvationen har uppenbarligen negativ derivata i alla punkter ($y' = -1 - y^4 < 0$).

(c) Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar så konvergerar även $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$. (2p)

Svar: Påståendet är falskt, ty om t.ex. $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (den är betingat konvergent) men $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ blir i så fall den harmoniska serien som är divergent.

7. Visa att den allmänna lösningen till en linjär och homogen differentialekvation med konstanta koefficienter av andra ordningen har formen $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ då differentialekvationens karakteristiska ekvation har två olika reella rötter. (6p)

Bevis: se föreläsningsanteckningar eller övningsuppgift 3.7.18 i Adams (sid 209).

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 130405	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm Taylorpolynomet $p_2(x)$ av grad 2, kring $x = 1$, för funktionen $f(x) = x^2 + 1$. (2p)

Lösning: Vi har

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x^2+1 & , & f(1) = 2 \\ f'(x) = 2x & , & f'(1) = 2 \\ f''(x) = 2 & , & f''(1) = 2 \end{array}$$

så $p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 2 + 2(x-1) + \dfrac{2}{2}(x-1)^2$

Svar: $p_2(x) = 2 + 2(x-1) + (x-1)^2$

(Anm. Notera att $p_2(x) = f(x)$)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$ (3p)

Lösning:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^\infty =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}_{=\ln 1 = 0} - \underbrace{\ln 1}_{=0} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

Svar: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$

(c) Bestäm $\displaystyle\int t(1+t)^{10}\,dt$ (3p)

Lösning: Istället för att binomialutveckla $(1+t)^{10}$ och integrera termvis så kan vi beräknas integralen med både partiell integration och med variabelsubstitution. Till exempel ger variabelsubstitutionen $x = 1 + t$ att;

$$\int t(1+t)^{10}\,dt = \int (x-1)x^{10}\,dx = \int \left(x^{11} - x^{10}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{12}x^{12} - \frac{1}{11}x^{11} + C = \frac{1}{12}(1+t)^{12} - \frac{1}{11}(1+t)^{11} + C$$

Svar: $\displaystyle\int t(1+t)^{10}\,dt = \frac{1}{12}(1+t)^{12} - \frac{1}{11}(1+t)^{11} + C$

(d) Bestäm lösningen på begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = e^y \sin x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

(ange lösningen på explicit form). (3p)

Lösning: Differentialekvationen är separabel och vi har;

$$y' = e^y \sin x \Leftrightarrow e^{-y}dy = \sin x\,dx \Leftrightarrow -e^{-y} = -\cos x + C$$

villkoret $y(\pi) = 0$ ger sedan att $C = -2$ så $e^{-y} = 2 + \cos x$, varpå vi får att;

Svar: $y = -\ln\left(2 + \cos x\right)$

(e) Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - y = e^x$. (3p)

Lösning: Eftersom 1 är en rot till differentialekvationens karakteristiska ekvation så ansätter vi $y_p(x) = Cxe^x$. Då är $y_p'(x) = C(1+x)e^x$ och $y_p''(x) = C(2+x)e^x$, vilket insatt i differentialekvationen ger $y_p'' - y_p = 2Ce^x$ så $C = \frac{1}{2}$ ger oss en lösning.

Svar: $y_p(x) = \frac{1}{2}xe^x$