Lösningsförslag till tentamen
TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1
130830 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jacob Leander, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm den funktion $y(x)$ som är sådana att $y(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^x \frac{(y(t))^2}{1+t^2}\,dt$, för alla x. (6p)

Lösning: Deriverar vi båda led får vi den separabla differentialekvationen $y'(x) = \dfrac{(y(x))^2}{1+x^2}$ och om $y \neq 0$ så får vi

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{y} = \arctan x + C$$

Från integralekvationen avläser vi att en lösning måste uppfylla $y(0) = \frac{1}{2}$, varpå vi får att $C = -2$ och därmed;

Svar: $y(x) = \dfrac{1}{2 - \arctan x}$

3. Antag att antalet minkar $y(t)$ efter t år, i ett visst område, beskrivs av en logistisk ekvation på formen $y'(t) = Ay(t)(1000 - y(t))$, för någon konstant A. Antag vidare att det år 2012 fanns 100 minkar i området och att populationen sedan växte till 250 stycken minkar år 2013. Hur många minkar kan man i så fall förvänta sig att det finns i området år 2014? (6p)

Lösning:

$$y' = Ay(1000 - y) \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{y(1000-y)} = A dt \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000-y}\right) = A dt \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1000}\ln\left|\frac{y}{1000-y}\right| = At + C$$

Vi kan anta att $t = 0$ år 2012 (ty annan startpunkt motsvarar bara andra värden på konstanterna A och C i lösningen) och $y(0) = 100$ ger att $C = \frac{1}{1000} \ln \frac{1}{9}$. Vidare följer av villkoret $y(1) = 250$ att $A = \frac{1}{1000} \ln 3$ så lösningem ges implicit av

$$\frac{9y}{1000 - y} = 3^t$$

Med $t = 2$ får vi speciellt att $\frac{y}{1000-y} = 1 \Leftrightarrow 2y = 1000$.

Svar: 500 minkar

4. (a) Bestäm Maclaurinserien för funktionen $\cos(x^2)$ och ange för vilka x den konvergerar. (2p)

Lösning: Eftersom $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, för alla x, så är;

Svar: $\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}$, för alla x.

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos x)^2}$ (4p)

Lösning:

$$\frac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos x)^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^8)\right)}{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^4 + O(x^8)}{\left(\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + O(x^4)}{\left(\frac{1}{2} + O(x^2)\right)^2} \to \frac{1/2}{1/4} = 2$$

då $x \to 0$.

Svar: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos x)^2} = 2$

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Beräkna följande integraler

(a) $\int_1^e \sin(\ln x)\, dx$ (3p)

Lösning: Partiell integration ger att;

$$I = \int_1^e \sin(\ln x)\, dx = [x \sin(\ln x)]_1^e - \int_1^e \cos(\ln x)\, dx =$$

$$= e \sin 1 - \left([x \cos(\ln x)]_1^e + \int_1^e \sin(\ln x)\, dx \right) = e \sin 1 - e \cos 1 + 1 - I$$

och löser vi ut I ur denna identitet så får vi;

Svar: $\int_1^e \sin(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1)$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (3p)

Lösning:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[x = \tan t \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = |\cos t| \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \end{array} \right] = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt = \left[\begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t\,dt \end{array} \right] = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1-u^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{2}\left[\ln\left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right)$$

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Om $f(x)$ är kontinuerlig och $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$, för alla x, så är $f(x)$ en udda funktion. (2p)

Svar: Påståendet är sant, ty

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0 \ , \quad \text{för alla } x \ \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{-x} f(t)\,dt \right) = 0 \ , \quad \text{för alla } x \ \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = 0 \ , \quad \text{för alla } x \ \Leftrightarrow \ f(-x) = -f(x) \ , \quad \text{för alla } x$$

(b) En differentialekvation av första ordningen som är både linjär och separabel är också homogen. (2p)

Svar: Påståendet är falskt, ty en differentialekvation på formen $y' = q(x)$ (av s.k."enkel typ") är både linjär, separabel och av första ordningen, men den är inte homogen.

(c) Serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ är konvergent. (2p)

Svar: Påståendet är falskt, ty

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right] = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt = \infty$$

så det följer av integralkriteriet (Sats 8, sid 510) att även serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ är divergent.

7. Rörelsen hos en dämpad harmonisk ocillator kan beskrivas med en andra ordningens differentialekvation. Ange formen för en sådan differentialekvation och förklara/motivera varför det är en rimlig modell för sådan rörelse (ange bl.a. vilka fysikaliska lagar modellen baseras på). Förklara också hur lösningarna ser ut då rörelsen är kritiskt dämpad, underdämpad respektive överdämpad. (6p)

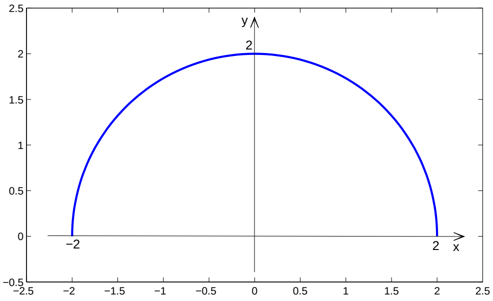
Svar: Se föreläsningsanteckningar och/eller se avsnitt 3.7 och 17.6 i kursboken.

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 130830	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Skissa den plana kurva som ges av parametriseringen $\begin{cases} x = 2\cos(\pi t) \\ y = 2\sin(\pi t) \end{cases}$, $0 \le t \le 1$ (2p)

Skiss:



(b) Beräkna arean av det område i xy-planet som begränsas av parablerna $y = (1-x)^2$ och $y = 1 - x^2$. (3p)

Lösning: Kurvorna skär varandra i $x = 0$ och $x = 1$ och mellan dessa punkter omsluter kurvorna ett område med $y = 1 - x^2$ som övre begränsningskurva och $y = (1-x)^2$ som nedre begränsningskurva (skissa kurvorna i samma figur). Områdets area kan därför beräknas med följande integral;

$$\int_0^1 (1 - x^2 - (1-x)^2)\,dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Svar: $\frac{1}{3}$

(c) Skriv den geometriska serien $x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$ med summabeteckning. Bestäm också de tal x för vilket serien blir konvergent med summan 3. (3p)

Lösning:

$$x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = \frac{x^2}{1-x^2} = 3 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svar: Serien kan skrivas $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}$ och dess summa blir 3 om $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) Bestäm lösningen på begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + x^2 y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (3p)

Lösning: Diff.ekv. är linjär av 1:a ordn. med integrerande faktor $e^{\int x^2\,dx} = e^{x^3/3}$ så

$$y' + x^2 y = x^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left(e^{x^3/3}y\right) = x^2 e^{x^3/3} \;\Leftrightarrow\; e^{x^3/3}y = e^{x^3/3} + C \;\Leftrightarrow\; y = 1 + Ce^{-x^3/3}$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger oss lösningen $y(x) \equiv 1$.

Svar: $y(x) \equiv 1$

(e) Ange en differentialekvation vars allmänna lösning har formen $y = x^2 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$ (3p)

Lösning: $C_1e^x + C_2e^{-2x}$ är homogenlösningarna till den differentialekvation som har karakteristiska ekvationen $(r-1)(r+2) = r^2 + r - 2$ dvs differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 0$. Insättning av $y = x^2$ i VL i denna differentialekvation ger $2 + 2x - 2x^2$ så vi konstaterar att;

Svar: $y = x^2 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$ är allmänna lösningen på differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 2 + 2x - 2x^2$