Lösningsförslag till tentamen
TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1
140425 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Beräkna arean av den rotationsyta som bildas då kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, roterar kring y-axeln. (6p)

Lösning: Arean av den yta som genereras då en kurva $x = g(y), c \leq y \leq d$, roterar kring y-axeln kan beräknas med formeln $2\pi \int_c^d |g(y)| \underbrace{\sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy}_{ds}$. I detta fall beskrivs kurvan av $x = \sqrt{y}$, $0 \leq y \leq 4$ så rotationsarean ges av;

$$2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy = \pi \int_0^4 \sqrt{4y+1}\, dy = \pi \left[\frac{1}{6}(4y+1)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1)$$

Alternativt kan vi beräkna arean genom att integrera i x-led och får då istället;

$$2\pi \int_0^2 x \underbrace{\sqrt{1+(2x)^2}\, dx}_{ds} = \left[\begin{array}{c} t = 1+4x^2 \\ dt = 8x\, dx \end{array}\right] = \frac{\pi}{4} \int_0^2 \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{17} = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1)$$

Svar: $\frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1)$ (a.e.)

3. Antag att ett föremål med massa m släpps vid tiden $t = 0$ från 10 meters höjd och därefter faller fritt mot marken endast påverkad av tyngdkraften och luftmotståndet. Om man antar att kraften som luftmotståndet ger upphov till är proportionell mot föremålets fart (vilket är rimligt vid låga hastigheter) så ger Newtons andra kraftlag att;

$$mv'(t) = mg - kv(t)$$

där $v(t)$ är föremålets fart efter t sekunder, g är tyngdaccelerationen och k är en proportionalitetskonstant. Hur lång sträcka har föremålet fallit efter t sekunder. (6p)

Lösning: Differentialekvationen är linjär av första ordningen och kan skrivas $v' + \frac{k}{m}v = g$. Multiplicerar vi båda led i denna ekvation med den integrerande faktorn $e^{\int \frac{k}{m}\,dt} = e^{kt/m}$ så får vi

$$e^{kt/m}v' + e^{kt/m}\frac{k}{m}v = e^{kt/m}g \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(e^{kt/m}v\right) = ge^{kt/m} \quad\Leftrightarrow$$
$$e^{kt/m}v = \frac{mg}{k}e^{kt/m} + C \quad\Leftrightarrow\quad v = \frac{mg}{k} + Ce^{-kt/m}$$

Eftersom hastigheten är 0 då föremålet släpps är $v(0) = 0$, vilket ger att $C = -\frac{mg}{k}$ så;

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}e^{-kt/m}$$

Sträckan $s(t)$ som föremålet fallit efter t sekunder fås sedan genom att integrera uttrycket för $v(t)$;

$$s(t) = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-kt/m} + D$$

Eftersom $s(0) = 0$ får vi slutligen att $D = -\frac{m^2g}{k^2}$ så;

$$s(t) = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-kt/m} - \frac{m^2g}{k^2} = \frac{mg}{k^2}\left(kt - m + me^{-kt/m}\right)$$

Svar: Efter t sekunder har föremålet fallit $\frac{mg}{k^2}\left(kt - m + me^{-kt/m}\right)$ meter

4. (a) Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{3^{2k}}$ är konvergent och beräkna dess värde. (4p)

Lösning: Serien kan identifieras som en geometrisk serie $\sum_k r^k$ med kvot $r = -7/9$. Serien är konvergent eftersom $|r| < 1$ och vi får vidare att;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{3^{2k}} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-7}{9}\right)^k = -1 + \frac{1}{1-(\frac{-7}{9})} = -1 + \frac{9}{16} = \frac{-7}{16}$$

Svar: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{3^{2k}} = \frac{-7}{16}$

(b) Ge exempel på en konvergent talföljd $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ sådan att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent. (2p)

(Motivera ditt svar!)

Lösning: Alla konvergenta talföljder s.a. $a_k \to a \neq 0$ duger som exempel här t.ex. $a_k = 1 + \frac{1}{k}$, men som vi sett i kursen så kan en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara divergent även för vissa talföljder s.a. $a_k \to 0$ t.ex. då $a_k = \frac{1}{k}$

Svar: Betrakta t.ex. $a_k = 1 + \frac{1}{k}$

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. En kedjekurva är den form en böjlig kedja eller kabel får av tyngdkraften då den hänger fritt mellan två fixa punkter. Man kan visa att en sådan kurva $y = y(x)$ uppfyller en differentialekvation av följande typ;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

för någon positiv konstant k. Bestäm kedjekurvans form då $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ och $k = 1$. (6p)

Lösning: Med $z = y'$ och $k = 1$ får vi den separabla differentialekvationen

$$z' = \sqrt{1 + z^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = dx$$

så vi behöver hitta en primitiv funktion till $1/\sqrt{1 + z^2}$.
En kalkyl med några ”standardsubstitutioner” och trigonometriska omskrivningar ger att;

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,dz = \left[\begin{array}{l} z = \tan u \\ dz = \frac{1}{\cos^2 u} du \end{array}\right] = \int \frac{1}{\cos u}\,du = \int \frac{\cos u}{1 - \sin^2 u}\,du = \left[\begin{array}{l} v = \sin u \\ dv = \cos u\,du \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{1 - v^2}\,dv = \int \frac{1}{(1 - v)(1 + v)}\,dv = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 + v} + \frac{1}{1 - v}\right) dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\ln|1 + v| - \ln|1 - v|)) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + v}{1 - v}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1 + \sin u)^2}{1 - \sin^2 u}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1 + \sin u)^2}{\cos^2 u}\right| = \ln\left|\frac{1 + \sin u}{\cos u}\right| = \ln(\sqrt{1 + z^2} + z)$$

Lösningen på ovanstående separabla differentialekvation ges således implicit av;

$$\ln(\sqrt{1 + z^2} + z) = x + C \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + z^2} + z = e^{x+C} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + z^2} = e^{x+C} - z \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + z^2 = \left(e^{x+C} - z\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = e^{2(x+C)} - 2ze^{x+C} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2}\left(e^{x+C} - e^{-(x+C)}\right)$$

Integrerar vi nu båda led får vi att;

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x+C} + e^{-(x+C)}\right) + D \qquad \left(= \frac{1}{2}\cosh(x + C) + D \right)$$

Randvillkoren $y(0) = 0$ och $y(1) = 0$ ger slutligen (efter lite kalkyl) att;

Svar: $y = \frac{1}{2}\left(e^{x-\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}-x}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \left(= \frac{1}{2}\cosh(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\cosh\frac{1}{2} \right)$

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar.
(rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}$ är konvergent. (2p)

Svar: Sant, ty $0 < \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, då $0 < x < 1$, och $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ är konvergent.

(b) Följande två parametriseringar beskriver samma kurva

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 2t \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi \qquad \qquad \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t\sqrt{2 - t^2} \end{cases}, \ -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$$ (2p)

Svar: Sant. Den första parametriseringen beskriver uppenbarligen hela enhetscirkeln. Den andra parametriseringen beskriver också punkter på enhetscirkeln ty;

$$(1-t^2)^2 + (t\sqrt{2-t^2})^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + t^2(2-t^2) = 1$$

Vidare är $y = t\sqrt{2-t^2} \le 0$ för $-\sqrt{2} \le t \le 0$ och $x(-\sqrt{2}) = -1, x(0) = 1$, så

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t\sqrt{2 - t^2} \end{cases}, \ -\sqrt{2} \le t \le 0$$

beskriver den nedre delen av enhetscirkeln. På liknande sätt inses att;

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t\sqrt{2 - t^2} \end{cases}, \ 0 \le t \le \sqrt{2}$$

beskriver den övre delen av enhetscirkeln.

(c) Partialsummorna till serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ bildar en avtagande talföljd. (2p)

Svar: Falskt.
Eftersom alla termerna i serien är positiva så är $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$ en växande talföljd.

7. Analysens huvudsats knyter samman derivation och integration genom formeln;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Bevisa detta under lämpliga förutsättningar på $f(x), a$ och x.
Redogör tydligt för var förutsättningarna kommer in i beviset. (6p)

Lösning: Se föreläsningsanteckningar eller beviset av Sats 5 i avsnitt 5.5 (sid 312) i Adams.

Anonym kod	**TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 140425**	sid nr. **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Förklara vad som menas med en *Riemannsumma* för en funktion på ett intervall. (2p)

Beskrivning: En Riemannsumma för en funktion $f(x)$ på ett intervall $[a,b]$ är en summa av typen;

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

där $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ är en partition av intervallet $[a,b]$ och $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

(b) Bestäm en primitiv funktion till $\dfrac{x}{1-x^2}$. (3p)

Lösning:

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{array}\right] = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{-1}{2}\ln|t| + C = \frac{-1}{2}\ln|1-x^2| + C$$

Alternativt kan vi beräkna integralen genom partialbråksuppdelning;

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{x}{(1+x)(1-x)}\,dx = \frac{-1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) dx =$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\ln|1+x| + \ln|1-x|\right) + C = \frac{-1}{2}\ln|1-x^2| + C$$

Svar: $\dfrac{-1}{2}\ln|1-x^2|$

(c) Lös differentialekvationen $e^{y+x}y' = x$ (3p)

Lösning:

$$e^{y+x}y' = x \quad \Leftrightarrow \quad e^y y' = xe^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^y\,dy = xe^{-x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int e^y\,dy = \int xe^{-x}\,dx$$

Partiell integration av HL ger att;

$$e^y = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = C - (x+1)e^{-x}$$

vilket ger att;

Svar: $y = \ln\left(C - (x+1)e^{-x}\right)$

(d) Bestäm lösningen på randvärdesproblemet $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y(1) = 0 \end{cases}$ (3p)

Lösning: Differentialekvationen är linjär med konstanta koefficienter och dess karakteristiska ekvation $r^2 - r - 2 = 0$ har rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = 2$, så den allmänna lösningen till differentialekvationen är $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$. Vi bestämmer sedan konstanterna C_1 och C_2 så att randvillkoren blir uppfyllda;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1e^{-1} + C_2e^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-1} & e^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e^2 - e^{-1}}\begin{bmatrix} e^2 & -1 \\ -e^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{e^2 - e^{-1}}\begin{bmatrix} e^2 \\ -e^{-1} \end{bmatrix}$$

Svar: $y = (e^{2-x} - e^{2x-1})/(e^2 - e^{-1}) \qquad \left(= (e^{3-x} - e^{2x})/(e^3 - 1)\right)$

(e) Bestäm Taylorpolynomet $p_3(x)$ av grad 3, kring $x = 1$, för funktionen $f(x) = x\ln x$. (3p)

Lösning: Eftersom $f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = 1/x, f'''(x) = -1/x^2$ så är $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = 1, f'''(1) = -1$ varpå vi får att;

$$p_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(x)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-1)^3 = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$$

Svar: $p_3(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$