Lösningsförslag till tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

140829 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Elin Solberg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

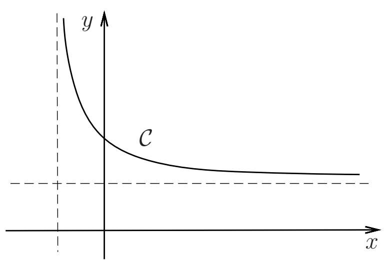
1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Betrakta den plana kurva $\mathcal{C}$ som ges av parametriseringen $\begin{cases} x = 1/t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$, $0 < t < \infty$.

(a) Skissa kurvan $\mathcal{C}$ och ange eventuella asymptoter (enbart plottning ger inga poäng men kan utföras som kontroll). (3p)

Lösning/Skiss: Sambanden ger att $y = \frac{1}{x+1} + 1$, $-1 < x < \infty$, varpå man enkelt avläser kurvans utseende. För att tydliggöra vad som händer då $x \to -1^-$ resp $x \to \infty$ (och som stödlinjer) ritar vi även in kurvans asymptoter $y = 1$ och $x = -1$;



(b) Skriv upp en integral som ger längden av den del av kurvan $\mathcal{C}$ som motsvarar parametervärdena $0.5 \le t \le 1$ (obs! integralen behöver inte beräknas). (3p)

Lösning: Vi har $x'(t) = -1/t^2$ och $y'(t) = 1$ så båglängdselementet är

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \sqrt{\frac{1}{t^4} + 1}\, dt$$

och därmed är;

Svar: Längden av kurvbiten $= \int_{0.5}^{1} \sqrt{\frac{1}{t^4} + 1}\, dt$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 20\cos 2x \\ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$ (6p)

Lösning: Differentialekvationens karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 8 = 0$ har lösningarna $r = 1 \pm \sqrt{1+8} \ \Leftrightarrow \ r = 4$ eller $r = -2$, så homogenlösningarna har formen

$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$$

Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$. Vi har; $y_p'' - 2y_p' - 8y_p = ... = (-12A - 4B)\cos 2x + (-12B + 4A)\sin 2x$ så för att det skall ge en lösning så måste vi ha;

$$\begin{cases} -12A - 4B = 20 \\ -12B + 4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Differentialekvationens allmänna lösning är således

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

Begynnelsevillkoren ger sedan att;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 0 \\ 4C_1 - 2C_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Svar: Begynnelsevärdesproblemet har lösningen $y = \frac{2}{3}e^{4x} + \frac{5}{6}e^{-2x} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

4. (a) Bestäm konvergensintervallet för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-3)^n$. (3p)

Lösning: Potensserien är en geometrisk serie som konvergerar precis då;
$|2(x-3)| < 1 \ \Leftrightarrow \ |x-3| < \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ -\frac{1}{2} < x - 3 < \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ 3 - \frac{1}{2} < x < 3 + \frac{1}{2}$

Svar: Konvergensintervallet för potensserien är $2.5 < x < 3.5$.

(b) Förklara vad som menas med en betingat konvergent serie och ge exempel på en sådan serie. (3p)

Svar: En serie som är konvergent men inte absolutkonvergent sägs vara betingat konvergent som t.ex. serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Antag att en rektangulärt formad simbassäng, som är 8 meter bred och 20 meter lång, är helt fylld med vatten. Antag vidare att simbassängens plana botten sluttar så att det är 1 meter djupt i ena kortändan och 3 meter djupt i den andra. Bestäm då det totala (hydrostatiska) trycket som vattnet utövar mot botten och de fyra vertikala sidoväggarna i bassängen. (6p)

Lösning: Det totala trycket mot bassängens två vertikala kortsidor (som båda är rektangelformade) är

$$T_1 = \int_0^1 \rho \cdot g \cdot h \cdot 8\,dh + \int_0^3 \rho \cdot g \cdot h \cdot 8\,dh = 80\,\rho \cdot g$$

där ρ är vattnets densitet ($\approx 1000\,kg/m^3$) och g är tyngdaccellerationen ($\approx 9.8\,m/s^2$). Det totala trycket mot bassängens vertikala långsidor (som har en sluttande nedersida) är;

$$T_2 = 2\left(\int_0^1 \rho \cdot g \cdot h \cdot 20\,dh + \int_1^3 \rho \cdot g \cdot h \cdot (30 - 10h)\,dh\right) = \frac{260}{3}\,\rho \cdot g$$

Vidare är det totala trycket mot bassängens sluttande (rektangulära) botten;

$$T_3 = \int_0^{20} \rho \cdot g \cdot \left(1 + \frac{y}{10}\right) \cdot \frac{4}{5}\sqrt{101}\,dy = 32\sqrt{101}\,\rho \cdot g$$

Så det totalt trycket mot bassängens botten och alla sidor är därmed;

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 4\left(\frac{125}{3} + 8\sqrt{101}\right)\,\rho \cdot g$$

Lösning: Det totalt trycket mot bassängens botten och alla sidor är

$$4\left(\frac{125}{3} + 8\sqrt{101}\right)\,\rho \cdot g \qquad \text{(Newton)}$$

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett visst intervall så är $f(x)$ också integerbar på intervallet. (2p)

Svar: Påståendet är sant enligt Sats 2 i avsnitt 5.3.

(b) Differentialekvationen $y' = xy + x - y - 1$ är separabel. (2p)

Svar: Påståendet är sant, ty differentialekvationen kan skrivas $y' = f(x)g(y)$, där $f(x) = x - 1$ och $g(y) = y + 1$.

(c) Om $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande talföljd och $f(x)$ en avtagande funktion så är $\{f(a_k)\}_{k=1}^{\infty}$ en växande talföljd. (2p)

Svar: Påståendet är sant, ty om $f(x)$ är en avtagande funktion och $a_{k+1} < a_k$ så är;

$$f(a_{k+1}) > f(a_k)$$

7. Formulera och bevisa satsen om substitution i bestämda integraler. (6p)

Svar: Se Sats 6 i avsnitt 5.6.

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 140829	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $f(1)$ och $f'(1)$ då $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ (2p)

Lösning: Vi ser direkt att $f(1) = \displaystyle\int_1^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = 0.$

Vidare ger Analysens huvudsats att $f'(x) = \sqrt{1+x^2}$ så

Svar: $f(1) = 0$ och $f'(1) = \sqrt{2}$

(b) Formulera medelvärdessatsen för integraler (obs! alla förutsättningar och slutsats skall finnas med i formuleringen, endast formel ger inga poäng). (3p)

Formulering: Se Sats 4 i avsnitt 5.4.

(c) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (3p)

(Tips: gör substitutionen $t = x^2$)

Lösning:

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\arctan t\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Svar: $\pi/4$

(d) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $xy' + y = xe^x$ (3p)

Lösning: $xy' + y = xe^x \;\Leftrightarrow\; \dfrac{d}{dx}(xy) = xe^x \;\Leftrightarrow\; xy = (x-1)e^x + C$

Svar: $y = \dfrac{1}{x}\left((x-1)e^x + C\right)$

(e) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x^2$ kring punkten $x = 3$. (3p)

Lösning: Vi har $f'(x) = 2x$ så linjäriseringen av $f(x)$ kring $x = 3$ är;

$$L(x) = f(3) + f'(3)(x-3) = 9 + 6(x-3) \qquad (= 6x - 9)$$

Svar: Linjäriseringen av $f(x)$ kring $x = 3$ är $L(x) = 9 + 6(x-3)$

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \le 1$$