Sant/falskt-frågor för läsvecka 2

Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. De flesta skall du kunna svara på (och motivera) utan hjälp av papper och penna. Några av dem, som kanske kräver lite extra eftertanke, är markerade med *. Svar och motiveringar finns längre bak i dokumentet men de anges inte i samma ordning som påståendena. Detta p.g.a. att du inte så lätt skall råka se svaret på påståenden du ännu inte funderat över. Numret inom parentes i högermarginalen vid respektive påstående anger vilket nummer i listorna med svar och motiveringar, som hör ihop med respektive påstående.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x^3)\,dx = \int_{a^3}^{b^3} f(t)\,dt$ (S22)

2. $\displaystyle\int_a^b f(t)f'(t)\,dt = 0$, om $f(a) = f(b)$ (S9)

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$, för alla positiva heltal n. (S13)

*__4.__ Om $f(x) = x^3 + x$ så är $\displaystyle\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx = \frac{5}{4}$ (S15)

*__5.__ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\int_0^1 \frac{xh^2}{(x^2+h^2)^2}\,dx\right) = \int_0^1 \left(\lim_{h\to 0}\frac{xh^2}{(x^2+h^2)^2}\right)dx$ (S10)

**__6.__ Med ett variabelbyte $x = h(t)$ kan man överföra integralen $\int e^{-x^2}\,dx$ på formen $\int e^{-t}\,dt$ (S11)

7. Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner på ett intervall $[a, b]$ så ger $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ arean av området mellan funktionsgraferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$, $a \le x \le b$. (S4)

8. $\displaystyle\int (f(x)g'(x) + g(x)f'(x))\,dx = f(x)g(x) + C$ (S8)

9. Om man tillämpar formeln för partiell integration dvs. $\int fg = fG - \int f'G$ med $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ och $g(x) = \frac{1}{x}$ så får man att

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$ (S5)

10. Det finns konstanter A, B, C & D sådana att

(**a**) $\displaystyle\frac{x^2+x+1}{2x^3+3x^2-3x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1}$, för alla $x \neq -2, -\frac{1}{2}, 1$ (S14f)

(**b**) $\displaystyle\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$, för alla $x \neq -1, 2$ (S14c)

(**c**) $\displaystyle\frac{x^2+x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x-1}$, för alla $x \neq 0, 1$ (S14e)

(**d**) $\displaystyle\frac{x^2+x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x-1}$, för alla $x \neq 0, 1$ (S14b)

*(**e**) $\displaystyle\frac{x^3+x+1}{x(x^3-1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx^2+Cx+D}{x^3-1}$, för alla $x \neq 0, 1$ (S14a)

*(**f**) $\displaystyle\frac{x^3+x+1}{(x+1)(x^3+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx^2+Cx+D}{x^3+1}$, för alla $x \neq -1$ (S14d)

11. $\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,dt$ är konvergent $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_x^\infty f(t)\,dt = 0$ (S16)

12. (**a**) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ är konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(2t)\,dt$ är konvergent (S19d)

(**b**) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ är konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty 2f(t)\,dt$ är konvergent (S19f)

(**c**) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ är konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(2+t)\,dt$ är konvergent (S19a)

(**d**) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ är konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty (2+f(t))\,dt$ är konvergent (S19c)

(**e**) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ är konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(t^2)\,dt$ är konvergent (S19e)

(**f**) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ är konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty (f(t))^2\,dt$ är konvergent (S19b)

13. Följande integraler är konvergenta

(**a**) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$ (S7e) $\quad$ *(**e**) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{x+x^3}\,dx$ (S7g)

(**b**) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ (S7c) $\quad$ *(**f**) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ (S7b)

(**c**) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}+\frac{1+x-x^2}{1+x+x^3}\right)dx$ (S7h) $\quad$ **(**g**) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (S7d)

*(**d**) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)dx$ (S7a) $\quad$ **(**h**) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\pi-2\arctan x}{x}\,dx$ (S7f)

14. $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}+\frac{1+x-x^2}{1+x+x^3}\right)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{1+x-x^2}{1+x+x^3}\,dx$ (S1)

15. Formeln för partiell integration dvs. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$ med $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, g(x)=\sin x$ och $a=0, b=1$ ger att

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{x}}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}}\,dx$$ (S23)

16. $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \frac{15}{32}$ (S6)

17. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x}\,dx = 0$ (S12)

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^7}{1+x^8}\,dx = 0$ (S3)

19. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n \frac{x^7}{1+x^8}\,dx = 0$ (S20)

***20.** Det finns något x för vilket $\displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{1+t^8}\,dt = \frac{1}{2}$ (S17)

****21.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$ (S21)

****22.** Om $0 \le \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \le 1$, för alla $x \ge 1$, så är $\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,dt$ konvergent. (S2)

*****23.** Om $0 \le \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \le 1$, för alla $x \ge 1$, så är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ konvergent. (S18)

Svar

S1. Falskt (M1)

S2. Falskt (M2)

S3. Falskt (M3)

S4. Falskt (M4)

S5. Sant (M5)

S6. Falskt (M6)

S7.
(**a**) Sant (M7a)
(**b**) Falskt (M7b)
(**c**) Sant (M7c)
(**d**) Sant (M7d)
(**e**) Falskt (M7e)
(**f**) Sant (M7f)
(**g**) Sant (M7g)
(**h**) Sant (M7h)

S8. Sant (M8)

S9. Sant (M9)

S10. Falskt (M10)

S11. Sant (M11)

S12. Falskt (M12)

S13. Sant (M13)

S14.
(**a**) Sant(M14a)
(**b**) Sant (M14b)
(**c**) Falskt (M14c)
(**d**) Falskt (M14d)
(**e**) Falskt (M14e)
(**f**) Sant (M14f)

S15. Sant (M15)

S16. Sant (M16)

S17. Sant (M17)

S18. Sant (M18)

S19.
(**a**) Sant (M19a)
(**b**) Falskt (M19b)
(**c**) Falskt (M19c)
(**d**) Sant (M19d)
(**e**) Falskt (M19e)
(**f**) Sant (M19f)

S20. Sant (M20)

S21. Sant (M21)

S22. Falskt (M22)

S23. Falskt (M23)

Motiveringar

M1. Integralerna i HL är divergenta.

M2. Betrakta t.ex. $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x-1)$

M3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^7}{1+x^8}\,dx$ är divergent , ty $0 \le \dfrac{1}{2x} \le \dfrac{x^7}{1+x^8}$, då $x \ge 1$

M4. Om $f(x) \ge g(x)$ på intervallet $[a,b]$ så stämmer påståendet, i annat fall är det falskt.

M5. Partiell integration ger att

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{f(x)}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}\,dx = \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{f(x)}\underbrace{\ln x}_{G(x)} - \int \underbrace{\frac{-1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}}_{f'(x)}\underbrace{\ln x}_{G(x)}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Det ligger nära till hands att misstänka att något är fel ty om man formellt subtraherar $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ från båda led i identiteten så erhålls $0 = 1$. Men båda led beskriver i själva verket samma mängd, nämligen mängden av primitiva funktioner till $\frac{1}{x\ln x}$, och eftersom dessa kan skilja sig åt med en konstant så är det inget motsägelsefullt med identiteten.

M6. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$ är divergent.

M7. (**a**) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\sqrt{x^4+1} - x^2\right)dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}\,dx$

och $0 \le \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$

(**b**) $0 \le \dfrac{1}{2x} \le \dfrac{\sin x}{x^2}$, för $0 < x \le \frac{1}{2}$

(**c**) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx \overset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$

(**d**) $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^\infty - \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

och $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ är absolutkonvergent ty $0 \le \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$.

Vidare är $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergent ty $0 \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$ för $x > 0$.

(**e**) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx \overset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t}\,dt$

(**f**) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\pi - 2\arctan x}{x}\,dx \overset{x=\cot x}{=} \int_0^{\pi/4} \frac{4t}{\sin 2t}\,dt$

och $\dfrac{4t}{\sin 2t}$ är begränsad på intervallet $0 < x \le \frac{\pi}{4}$

(**g**) $0 \le \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+x^3} \le \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, för $0 < x \le 1$, och $0 \le \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+x^3} \le \dfrac{2}{x^2}$, för $x \ge 1$

(**h**) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{1+x-x^2}{1+x+x^3}\right)dx = \int_1^\infty \frac{1+2x+x^2}{x(1+x+x^3)}\,dx$

och $0 \le \dfrac{1+2x+x^2}{x(1+x+x^3)} \le \dfrac{3}{x^2}$, för $x \ge 1$

M8. $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

M9. $\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}\left(f(b)^2 - f(a)^2\right) = 0$ om $f(a) = f(b)$

M10. $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{h\to 0} \frac{xh^2}{(x^2+h^2)^2}\right) dx = 0$ och

$$\lim_{h\to 0}\left(\int_0^1 \frac{xh^2}{(x^2+h^2)^2}\,dx\right) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-h^2}{2(x^2+h^2)}\right]_0^1 = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{2(1+h^2)}\right) = \frac{1}{2}$$

M11. Notera att $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx = \int e^{-t}\,dt$ om $\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du + C = -e^{-t}$, för någon konstant C.
Om vi låter $C = -\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$ så får vi t.ex. sambandet;

$$\int_x^\infty e^{-u^2}\,du = e^{-t} \;\Leftrightarrow\; t = -\ln\left(\int_x^\infty e^{-u^2}\,du\right)$$

Notera att $g(x) = -\ln\left(\displaystyle\int_x^\infty e^{-u^2}\,du\right)$ är strängt växande och därmed inverterbar så vi kan göra variabelbytet $x = g^{-1}(t)$

M12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx$ är divergent , ty $0 \le \dfrac{\cos 1}{x} \le \dfrac{\cos x}{x}$, då $0 < x \le 1$

M13. Variabelbytet $x = \frac{\pi}{2} - t$ ger;

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$$

M14. **(a)** $\dfrac{x^3+x+1}{x(x^3-1)} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$

(b) $\dfrac{x^2+x-1}{x^2(x-1)} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x-1}$

(c) Inses t.ex. genom att betrakta gränsvärdet av respektive led då $x \to \infty$.
Alternativt ger polynomdivision i VL att $\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-2)} = 1 + \dfrac{x+3}{(x+1)(x-2)}$
som enligt teorin om PBU kan skrivas $1 + \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2}$

(d) Inses t.ex. genom att multiplicera båda led med $(x+1)^2$ och låta $x \to -1$.
Då kommer $VL \to -\frac{1}{3}$ och $HL \to 0$. Eftersom $\dfrac{x^3+x+1}{(x+1)(x^3+1)} = \dfrac{x^3+x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$
så säger teorin om PBU att uttrycket kan skrivas $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$.
En kalkyl ger att $\dfrac{x^3+x+1}{(x+1)(x^3+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1/3}{(x+1)^2} + \dfrac{1/3}{x^2-x+1}$

(e) Inses t.ex. genom att dels multiplicera båda led med x och låta $x \to \infty$ (vilket ger $B = 1$) och dels multiplicera båda led med $x-1$ och låta $x \to 1$ (vilket ger $B = 3$). Alternativt ger teorin om PBU att VL kan skrivas $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$. En kalkyl ger att $\dfrac{x^2+x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{-2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x-1}$

(f) $2x^3+3x^2-3x-2 = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$ så likheten är möjlig enligt teorin om partialbråksuppdelning (PBU). En kalkyl ger att

$$\frac{x^2+x+1}{2x^3+3x^2-3x-2} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{1/3}{x+2} - \frac{1/3}{2x+1}$$

M15. $f(x) = x^3 + x$ är växande, och därmed även inverterbar, på intervallet $[0, 1]$. Vidare är;

$$\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx \overset{x=f(t)}{=} \int_0^1 tf'(t)\,dt = \int_0^1 (3t^3 + t)\,dt = \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

M16. Om $\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,dt$ är konvergent så är

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\int_1^\infty f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\int_x^\infty f(t)\,dt$$

M17. Om $I(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{1+t^8}\,dt$ så är $I(0) > \frac{1}{2}$ och $\lim_{x\to\infty} I(x) = 0$ så från satsen om mellanliggande värden följer det att $I(x) = \frac{1}{2}$ för något $x > 0$

M18. Sätt $I(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. Om $0 \le I(x) \le 1$, för alla $x \ge 1$ så ger partiell integration att;

$$\int_1^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \underbrace{\left[\frac{I(t)}{\sqrt{t}}\right]_1^\infty}_{=0} + \int_1^\infty \frac{I(t)}{2t^{3/2}}\,dt$$

Eftersom $0 \le \dfrac{I(t)}{2t^{3/2}} \le \dfrac{1}{2t^{3/2}}$ och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2t^{3/2}}\,dt$ är konvergent så är även $\displaystyle\int_1^\infty \frac{I(t)}{2t^{3/2}}\,dt$

M19. **(a)** $\displaystyle\int_0^\infty f(2+t)\,dt = \int_2^\infty f(t)\,dt$

(b) Betrakta t.ex. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + x^2}$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty 2\,dt$ är divergent

(d) $\displaystyle\int_0^\infty f(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt$

(e) Betrakta t.ex. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + x^2}$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty 2f(t)\,dt = 2\int_0^\infty f(t)\,dt$

M20. $\displaystyle\int_{-n}^n \frac{x^7}{1+x^8}\,dx = 0$, ty $\dfrac{x^7}{1+x^8}$ är udda

M21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \overset{x=1/t}{=} -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

M22. Variabelsubstitutionen $t = x^3$ överför en integral $\int_a^b f(x^3)\,dx$ på formen $\int_{a^3}^{b^3} f(t)3t^{1/3}\,dt$, vilket uppenbart inte behöver ha samma värde som $\int_{a^3}^{b^3} f(t)\,dt$ (tag t.ex. $f(t) \equiv 1, a = 0, b = 1$)

M23. Integralen är en konvergent generaliserad integral och

$$\int_\epsilon^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{x}}\right]_\epsilon^1 + \int_\epsilon^1 \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}}\,dx$$

men $\dfrac{-\cos x}{\sqrt{x}} \to -\infty$ och $\displaystyle\int_\epsilon^1 \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}}\,dx \to \infty$ då $\epsilon \to 0^+$