Sant/falskt-frågor för läsvecka 4

Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. De flesta skall du kunna svara på (och motivera) utan hjälp av papper och penna. Några av dem, som kanske kräver lite extra eftertanke, är markerade med *. Svar och motiveringar finns längre bak i dokumentet men de anges inte i samma ordning som påståendena. Detta p.g.a. att du inte så lätt skall råka se svaret på påståenden du ännu inte funderat över. Numret inom parentes i högermarginalen vid respektive påstående anger vilket nummer i listorna med svar och motiveringar, som hör ihop med respektive påstående.

1. Följande uttryck kan betraktas som differentialekvationer

(a) $y''(x) - y'(x) - 2y(x)$	(S13f)	**(d)** $e^t y^2 = t + y$	(S13e)
(b) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 e^x\right) = 1 + x$	(S13d)	**(e)** $\dfrac{d^2 f}{dy^2} - \dfrac{df}{dy} = f$	(S13c)
(c) $\dfrac{dz}{dt} = x + e^{\alpha t}$	(S13b)	**(f)** $F(t, y(t), y'(t)) = 0$	(S13a)

2. $y = C/x$ är lösning till differentialekvationen $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$, för alla värden på konstanten C. (S21)

3. Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är två olika lösningar till samma differentialekvation så är $y_1(x) = y_2(x) + C$, för någon konstant C. (S3)

4. Följande två differentialekvationer har samma lösningsmängd

$$y'(x) = x^2 + xy^2 \qquad \frac{dz}{dt} = t(t + z^2)$$ (S15)

5. $y' = x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; y'' = 2x + 2yy'$ (S6)

6. Följande differentialekvationer är av ordning 3

(a) $y' = x^3 + y$	(S30d)	**(c)** $y''' = x + (y')^2$	(S30c)
(b) $(y')^3 = x + y$	(S30a)	**(d)** $y^{(9)} + 3y^{(6)} + 3y^{(3)} = 0$	(S30b)

7. $y_1(x) = 0$ och $y_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ är två olika lösningar till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ (S10)

***8.** Differentialekvationen $\arctan(y') = 2\cosh(xy)$ saknar lösningar. (S19)

9. En linjär och homogen differentialekvation har alltid minst en lösning. (S25)

10. Följande differentialekvationer är linjära

(a) $y' = (1 + x^2)y$	(S11c)	**(e)** $y'' + 3y' - 5y = \sin x$	(S11f)
(b) $y' = (x + y)x^2$	(S11a)	**(f)** $xy'' = 1 + x^2 y$	(S11b)
(c) $y' = (x + y)y$	(S11g)	**(g)** $y'' = yy'$	(S11h)
(d) $y' = (1 + y^2)x$	(S11d)	**(h)** $y^{(n)} = x \arctan x$	(S11e)

11. $2x + 1$ är en integrerande faktor till den linjära differentialekvationen

$$y' + \frac{1}{x + 0.5}y = \sin x$$ (S14)

12. Om $I(x)$ är en integrerande faktor till en linjär differentialekvation av första ordningen så är även $I(x) + C$ en integrerande faktor, för varje konstant C. (S29)

13. Om $I(x)$ är en integrerande faktor till en linjär differentialekvation av första ordningen så är även $C \cdot I(x)$ en integrerande faktor, för varje konstant C. (S26)

14. Följande differentialekvationer är separabla

(**a**) $y' = (1+x^2)y$	(S17d)	(**e**) $y' = e^{x+y}$	(S17b)
(**b**) $y' = (x+y)x^2$	(S17h)	(**f**) $y' = e^{xy}$	(S17e)
(**c**) $y' = (x+y)y$	(S17c)	(**g**) $y' = xy + x - y - 1$	(S17a)
(**d**) $y' = (1+y^2)x$	(S17f)	(**h**) $y'' = (1+x)y$	(S17g)

15. Om f och g är kontinuerliga funktioner och $y(x)$ är en deriverbar funktion så är

$$f(y)y' = g(x) \;\Leftrightarrow\; \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \text{(S22)}$$

16. Lösningarna till differentialekvationen $(x^2+y^2)y' + 2xy = 0$ beskrivs implicit av ekvationen $y^3 + 3x^2y = C$ (S4)

17. En differentialekvation som är både linjär och separabel är också homogen. (S24)

18. Alla lösningar till differentialekvationen $2xy' = y^2 - 1$ har formen $y = \dfrac{1+Cx}{1-Cx}$, för någon konstant C. (S8)

19. Alla lösningar till differentialekvationen $y' = x(x^2+y^2)$ har ett lokalt minimum där $x = 0$. (S18)

* **20.** Alla lösningar till differentialekvationen $y' = x(x^2+y^2)$ är jämna. (S27)

21. Alla lösningar till differentialekvationen $y' = \ln(\cos^2 y)$ är avtagande. (S12)

22. Alla lösningar till differentialekvationen $(e^x + e^y)y' = 1$ är konkava. (S1)

23. Om $y(t)$ är lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = 2y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{5}\right) \quad , \quad y(0) = 1$$

så är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 5$ (S23)

24. Om $y(x)$ är lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$y' = \frac{y}{1+x^2y^4} \quad , \quad y(1) = 0$$

så är $y(2) > 0$ (S31)

* **25.** Om $y(x)$ är lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$y' = \frac{y}{1+x^2y^4} \quad , \quad y(0) = 1$$

så är $y(2) < 9$ (S7)

* **26.** Alla lösningar till differentialekvationen $y' = 1 - y^9$ har gränsvärdet 1 då $x \to \infty$. (S28)

27. Det finns en funktion $y(x)$ sådana att $y' = 1 + y^2$, för alla x. (S5)

* **28.** Det finns en funktion $y(x)$ sådana att $xy' = x^2 + 2y$, för alla x. (S16)

29. Det går precis en lösningskurva till differentialekvationen $y' = x^2 + y^2$ genom varje punkt i xy-planet. (S9)

* **30.** Alla lösningar till differentialekvationen $y' = x^2 + y^2$ är oändligt deriverbara. (S20)

* **31.** Funktionen $y(x) = \tan x$ uppfyller integralekvationen $y(x) = x + \int_0^x y(t)^2\,dt$, i en omgivning av origo. (S2)

Svar

S1. Sant (M1)

S2. Sant (M2)

S3. Falskt (M3)

S4. Sant (M4)

S5. Falskt (M5)

S6. Falskt (M6)

S7. Sant (M7)

S8. Falskt (M8)

S9. Sant (M9)

S10. Sant (M10)

S11.
(**a**) Sant (M11a)
(**b**) Sant (M11b)
(**c**) Sant (M11c)
(**d**) Falskt (M11d)
(**e**) Sant (M11e)
(**f**) Sant (M11f)
(**g**) Falskt (M11g)
(**h**) Falskt (M11h)

S12. Sant (M12)

S13.
(**a**) Sant (M13a)
(**b**) Sant (M13b)
(**c**) Sant (M13c)
(**d**) Falskt (M13d)
(**e**) Falskt/Sant (M13e)
(**f**) Falskt (M13f)

S14. Sant (M14)

S15. Sant (M15)

S16. Sant (M16)

S17.
(**a**) Sant (M17a)
(**b**) Sant (M17b)
(**c**) Falskt (M17c)
(**d**) Sant (M17d)
(**e**) Falskt (M17e)
(**f**) Sant (M17f)
(**g**) Falskt (M17g)
(**h**) Falskt (M17h)

S18. Sant (M18)

S19. Sant (M19)

S20. Sant (M20)

S21. Sant (M21)

S22. Sant (M22)

S23. Sant (M23)

S24. Falskt (M24)

S25. Sant (M25)

S26. Sant (M26)

S27. Sant (M27)

S28. Sant (M28)

S29. Falskt (M29)

S30.
(**a**) Falskt (M30a)
(**b**) Falskt (M30b)
(**c**) Sant (M30c)
(**d**) Falskt (M30d)

S31. Falskt (M31)

Motiveringar

M1. Av ekvationen framgår direkt att $y'(x) \geq 0$, för alla x. Vidare är;

$$(e^x + e^y)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^x + e^y} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{(e^x + e^y)^2}(e^x + e^y y') \leq 0, \text{ för alla } x$$

M2. Integralekvationen är ekvivalent med begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ och det är lätt att verifiera att $\tan x$ löser detta problem.

M3. Påståendet stämmer visserligen för differentialekvationer av typen $y' = f(x)$ men om HL även beror på y dvs. $y' = f(x, y)$ så är påståendet i allmänhet falskt. Betrakta t.ex. differentialekvationen i påstående 2.

M4. $(x^2 + y^2)y' + 2xy = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}\left(y^3 + 3x^2 y\right) = 0$

M5. Alla lösningar har lokalt formen $y = \tan(x + C)$. Ingen av dessa lösningar är definierade för alla x, och det finns heller ingen kontinuerlig funktion som är definierad för alla x och lokalt på formen $y = \tan(x + C)$.

M6. $y'' = 2x + 2yy' \;\Leftrightarrow\; y'' = \frac{d}{dx}(x^2 + y^2)) \;\Leftrightarrow\; y' = x^2 + y^2 + C$

M7. Notera att lösningen är sådan att $y'(x) \leq y(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}y) \leq 0$. Således är $e^{-x}y(x)$ avtagande för $x \geq 0$. Men värdet på $e^{-x}y(x)$ då $x = 0$ är 1 så det följer att $e^{-x}y(x) \leq 1$, för $x \geq 0$ dvs. $y(x) \leq e^x$, för $x \geq 0$. Speciellt är $y(2) \leq e^2 < 9$.

M8. $y \equiv -1$ är också en lösning till differentialekvationen.

M9. Följer av Picards sats (Sats 3 i avsnitt 18.3).

M10. Uppenbart att båda funktionerna uppfyller differentialekvationen och begynnelsevillkoret.

M11.

(a) Differentialekvationen kan skrivas på formen $y' + f(x)y = g(x)$, där $f(x) = -x^2$ och $g(x) = x^3$.

(b) Differentialekvationen kan skrivas på formen $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, där $p(x) = 0, q(x) = -x$ och $f(x) = 1/x$.

(c) Differentialekvationen kan skrivas på formen $y' + f(x)y = g(x)$, där $f(x) = -(1 + x^2)$ och $g(x) = 0$.

(d) Differentialekvationen innehåller termen xy^2, vilket inte får förekomma i en linjär differentialekvation.

(e) Differentialekvationen kan skrivas på formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

där $a_{n-1}(x) = ... = a_1(x) = a_0(x) = 0$ och $f(x) = x \arctan x$.

(f) Differentialekvationen kan skrivas på formen $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, där $p(x) = 3, q(x) = -5$ och $f(x) = \sin x$.

(g) Differentialekvationen innehåller termen y^2, vilket inte får förekomma i en linjär differentialekvation.

(**h**) Differentialekvationen innehåller termen yy', vilket inte får förekomma i en linjär differentialekvation.

M12. Vi avläser direkt ur ekvationen att $y'(x) < 0$, för alla x i vilket $y(x)$ är definierad.

M13. (**a**) Varje differentialekvation av första ordningen kan skrivas på denna form.

(**b**) Kan betraktas som en differentialekvation i $z(t)$, där x och α är någon typ av parametrar.

(**c**) Ett samband i funktionen f, betraktad som en funktion av y.

(**d**) Det är inget funktionssamband.

(**e**) Betraktas normalt inte som en differentialekvation eftersom ekvationen inte innehåller någon derivata, men formellt sätt är ekvationen av typen $F(t, y, y') = 0$ där F är en funktion av tre variabler vars värde bara beror på de två första variablerna. Så både Sant och falskt kan anses rätt svar på detta påstående.

(**f**) Det är inte ens en ekvation.

M14. Om vi multiplicerar båda led med $2x + 1$ så kan ekvationen skrivas;

$$\frac{d}{dx}\left((2x+1)y\right) = (2x+1)\sin x$$

M15. De beskriver samma differentialekvation, fast med andra beteckningarna och med en liten omskrivning i HL.

M16. $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & , \quad \text{då } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{då } x = 0 \end{cases}$ är en lösning till differentialekvationen.

M17. (**a**) Differentialekvationen kan skrivas $\dfrac{1}{y+1}y' = x + 1$

(**b**) Differentialekvationen kan skrivas $e^{-y}y' = e^x$

(**c**) Differentialekvationen kan inte skrivas på formen $g(y)y' = f(x)$

(**d**) Differentialekvationen kan skrivas $\dfrac{1}{y}y' = 1 + x^2$

(**e**) Differentialekvationen kan inte skrivas på formen $g(y)y' = f(x)$

(**f**) Differentialekvationen kan skrivas $\dfrac{1}{1+y^2}y' = x$

(**g**) Differentialekvationen är inte ens av första ordningen.

(**h**) Differentialekvationen kan inte skrivas på formen $g(y)y' = f(x)$

M18. Vi avläser direkt ur ekvationen att $y'(x) \leq 0$, då $x \leq 0$, och att $y'(x) \geq 0$, då $x \geq 0$.

M19. VL$\leq \frac{\pi}{2}$ och HL≥ 2, för alla värden på x, y, y'.

M20. En lösning y måste uppenbarligen vara deriverbar. Speciellt följer att HL dvs. $x^2 + y^2$ är deriverbart och därmed är även VL dvs. y' deriverbart. Således existerar y''. På liknande sätt kan vi nu argumentera för att y''' existerar och rekursivt även att $y^{(n)}$ existerar för alla n.

M21. $x^2 \dfrac{d^2}{dx}\left(\dfrac{C}{x}\right) + 3x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{C}{x}\right) + \dfrac{C}{x} = \dfrac{2C}{x} - \dfrac{3C}{x} + \dfrac{C}{x} = 0.$

M22. Om $F(y)$ och $G(x)$ är primitiver till $f(y)$ resp $g(x)$ så är;

$$f(y)y' = g(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(y) = \frac{d}{dx}G(x) \Leftrightarrow$$

$$F(y) = G(x) + C \Leftrightarrow \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

M23. Lösningen till den logistiska ekvationen är $y = \dfrac{5}{1+4e^{-2t}}$ varpå det följer att $y(t) \to 5$ då $t \to \infty$

M24. Differentialekvationer på formen $y' = f(x)$ är både linjära och separabla men ej homogena om $f(x) \neq 0$.

M25. $y(x) \equiv 0$ är lösning till varje linjär och homogen differentialekvation.

M26. Om $I(x)$ är en integrerande faktor till ekvationen $y' + f(x)y = g(x)$ dvs.

$$\frac{d}{dx}(I(x)y) = I(x)y' + I(x)f(x)y$$

så är

$$\frac{d}{dx}(C\,I(x)y) = C\frac{d}{dx}(I(x)y) = C\,(I(x)y' + I(x)f(x)y) = C\,I(x)y' + C\,I(x)f(x)y$$

M27. Vi avläser direkt ur ekvationen att $y'(x)$ är udda så

$$y'(-x) = -y'(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y(-x)) = \frac{d}{dx}(y(x)) \Leftrightarrow y(-x) = y(x) + C$$

Här måste vi ha $C = 0$ ty $y(x)$ är deriverbar och därmed speciellt också kontinuerlig i $x = 0$. Så vi konstaterar att $y(-x) = y(x)$, för alla x, dvs. $y(x)$ är jämn.

M28. Om $y(0) > 1$ så inser man att $y(x) > 1$ för alla $x \geq 0$, ty om vi skulle ha $y(x) = 1$ för något $x > 0$ så motsäger det satsen om entydig lösning genom varje punkt ($y(x) \equiv 1$ är ju en lösning). Vidare följer det av ekvationen att $y'(x) < 1 - y$, då $y > 1$. Med liknande argumentation som i motiveringen av uppgift 25 så följer det att $y(x) < 1 + (y(0) - 1)e^{-x}$. Vi konstaterar därför att $1 < y(x) < 1 + (y(0) - 1)e^{-x}$, för $x \geq 0$. Låter vi speciellt $x \to \infty$ så följer det av dessa olikheter (med instängning) att $y(x) \to 1$ då $x \to \infty$.

M29. Om $I(x)$ är en integrerande faktor till ekvationen $y' + f(x)y = g(x)$ dvs.

$$\frac{d}{dx}(I(x)y) = I(x)y' + I(x)f(x)y$$

så är

$$\frac{d}{dx}((I(x) + C)y) = I(x)y' + I(x)f(x)y + Cy' = (I(x) + C)y' + I(x)f(x)y$$

vilket inte är detsamma som $(I(x) + C)y' + (I(x) + C)f(x)y$, för alla funktioner y.

M30. (**a**) Differentialekvationen är av ordning 1.

(**b**) Differentialekvationen är av ordning 9.

(**c**) Högsta förekommande derivata är tredjederivata.

(**d**) Differentialekvationen är av ordning 1.

M31. Lösningen är $y(x) \equiv 0$.