Sant/falskt-frågor för läsvecka 5

Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. De flesta skall du kunna svara på (och motivera) utan hjälp av papper och penna. Några av dem, som kanske kräver lite extra eftertanke, är markerade med *. Svar och motiveringar finns längre bak i dokumentet men de anges inte i samma ordning som påståendena. Detta p.g.a. att du inte så lätt skall råka se svaret på påståenden du ännu inte funderat över. Numret inom parentes i högermarginalen vid respektive påstående anger vilket nummer i listorna med svar och motiveringar, som hör ihop med respektive påstående.

1. Om $y(t)$ är en lösning till en linjär och homogen differentialekvation så är även $C \cdot y(t)$ en lösning till samma ekvation. (S10)

2. Alla lösningar till differentialekvationen $y^{(4)} - 2y^{(3)} - 13y'' + 14y' + 24y = 0$ har formen $C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{4x}$. (S4)

3. Det finns konstanter p och q sådana att $e^t \sin t$ är en lösning på differentialekvationen;

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

(S11)

4. Om D är deriveringsoperatorn och I är identitetsoperatorn så är

$$y'' - y' - 2y = 0 \;\Leftrightarrow\; (D + I)(D - 2I)y = 0$$

(S15)

5. Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' + x^2 y = 0$ så är $y_1 + y_2$ också en lösning till denna ekvation. (S7)

6. Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' + xy^2 = 0$ så är $y_1 + y_2$ också en lösning till denna ekvation. (S2)

7. Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' - y' - 2y = x^2 \sin x$ så är $y_1 + y_2$ också en lösning till denna ekvation. (S14)

8. Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' - y' - 2y = x^2 \sin x$ så är $y_1 - y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$, för några konstanter C_1 och C_2. (S6)

9. $y(x) = e^x + e^{-x}$ är en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 4e^x$. (S12)

10. $y(x) = \arctan x$ är lösning till någon linjär och homogen differentialekvation med konstanta koefficienter. (S9)

* **11.** $y(x) = \arctan x$ är lösning till någon linjär och homogen differentialekvation. (S16)

* **12.** Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

har en entydig lösning. (S1)

* **13.** Randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = 1 + y^2 \\ y'(0) = 0\ ,\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

saknar lösningar. (S8)

* **14.** Om $y(x)$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = x$, för $x > 0$, så är $z(t) = y(e^t)$ en lösning till differentialekvationen $z'' + 2z' + 5z = e^t$, för alla t. (S3)

* **15.** Antag att rörelsen hos en dämpad harmonisk ocillator beskrivs av differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ (här är $y(t)$ är avikelsen från jämviktsläget vid tiden t). Rörelsen sägs då vara kritiskt dämpad. (S13)

* **16.** Cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ är en ortogonalkurva till kurvskaran $y = Cx$ (S5)

Svar

S1. Sant (M1)

S2. Falskt (M2)

S3. Falskt (M3)

S4. Sant (M4)

S5. Sant (M5)

S6. Sant (M6)

S7. Sant (M7)

S8. Sant (M8)

S9. Falskt (M9)

S10. Sant (M10)

S11. Sant (M11)

S12. Sant (M12)

S13. Sant (M13)

S14. Falskt (M14)

S15. Sant (M15)

S16. Sant (M16)

Motiveringar

M1. Om $z = \frac{dy}{dx}$ så är
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$
så differentialekvationen kan skrivas
$$\frac{dz}{dy}z = 1 + y^2$$
Av entydighetssatsen följer att det finns en entydig funktion z som uppfyller denna ekvation och begynnelsevillkoret $z(0) = 1$. Det följer sedan också av entydighetssatsen att det finns en entydig funktion y sådan att $y'(x) = z(x)$, sådan att $y(0) = 0$.

M2. Eftersom differentialekvationen inte är linjär och homogen så har man ingen anledning att förvänta sig att summan av två lösningar också skall vara en lösning. Vi vet att det finns minst en lösning till differentialekvationen genom varje punkt i xy-planet (i själva verket finns det oändligt många, varför då?). Om t.ex. y_1 och y_2 är de två lösningar som går genom punkterna $(1, 1)$ respektive $(1, 2)$ så följer att $D^2(y_1 + y_2) + x^2(y_1 + y_2)^2 = 2x^2y_1y_2 = 4 \neq 0$, då $x = 1$.

M3. Eftersom $z' = e^ty'$ och $z'' = e^ty' + e^{2t}y''$ så finns ingen anledning att förvänta sig att de två ekvationerna har samma lösningar. T.ex. är $y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}$ en lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = x$, men $z(t) = y(e^t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{2}{25}$ är inte en lösning till differentialekvationen $z'' + 2z' + 5z = e^t$.

M4. Det är lätt att verifiera att $r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = -3$ och $r_4 = 4$ är rötterna till differentialekvationens karakteristiska ekvation $r^4 - 2r^3 - 13r^2 + 14r + 24 = 0$ så påståendet följer av texten i avsnitt 18.5.

M5. Det är geometriskt uppenbart att linjerna $y = Cx$ som strålar ut från origo skär vinkelrät genom alla cirklar med centrum i origo, men låt oss ändå ge ett analytiskt argument. Tangentlinjen till cirkeln i en punkt (a, b) på cirkeln, där $b \neq 0$, har riktningskoefficienten $k_1 = -a/b$ ty deriverar vi ekvationen $x^2 + y^2 = 4$ implicit m.a.p. x så får vi $2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = -x/y$. Å andra sidan har den linje $y = Cx$ som går genom (a, b) riktningskoefficienten $k_2 = b/a$. Denna linje och tangentlinjen till cirkeln skär varandra vinkelrätt eftersom $k_1k_2 = -1$. Att linjen $y = 0$ (dvs. x-axeln) skär cirkeln vinkelrätt i punkterna $(\pm 2, 0)$ är uppenbart.

M6. Låt $P(D) = D^2 - D - 2I$, där D är deriveringsoperatorn och I är identitetsoperatorn. Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $P(D)y = x^2 \sin x$ så är
$$P(D)(y_1 - y_2) = \underbrace{P(D)y_1}_{x^2 \sin x} - \underbrace{P(D)y_2}_{x^2 \sin x} = 0$$
så $y_1 - y_2$ är en homogenlösning. Eftersom differentialekvationens karakteristiska ekvation $r^2 - r - 2 = 0$ har rötterna -1 och 2 så följer det att $y_1 - y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, för några konstanter C_1 och C_2.

M7. Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' + x^2y = 0$ så är
$$D^2(y_1 + y_2) + x^2(y_1 + y_2) = \underbrace{y_1'' + x^2y_1}_{=0} + \underbrace{y_2'' + x^2y_2}_{=0} = 0$$
Eller mer allmänt om $P(D)$ är en linjär differentialoperator(som tex $P(D) = D^2+x^2I$) så är $P(D)\,(y_1 + y_2) = P(D)y_1 + P(D)y_2$ så om $P(D)y_1 = 0$ och $P(D)y_2 = 0$ så är även $P(D)\,(y_1 + y_2) = 0$. Notera att det är viktigt att differentialekvationen är homogen för att påståendet skall vara sant (se t.ex. påstående 7).

M8. Det framgår av differentialekvationen att en lösning y har en derivata y' som är strängt växande på intervallet $[0,1]$, varpå vi omöjligen kan ha $y'(0) = y'(1)$.

M9. Alla lösningar till sådana ekvationer består av en summa av termer på formen $e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$, där P och Q är polynom.

M10. Om

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

så är

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}(Cy(t)) + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(Cy(t)) + ... + a_1(t)\frac{d}{dt}(Cy(t)) + a_0(t)Cy(t) =$$

$$= C\underbrace{\left(a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t)\right)}_{=0} = 0$$

M11. $e^t \sin t$ är lösning till en sådan differentialekvation om $1+i$ är lösning till motsvarande karakteristiska ekvation $r^2 + pr + q = 0$. Om vi vill att p och q skall vara reella så måste även $1 - i$ vara en lösning till den karakteristiska ekvationen så vi måste ha $r^2+pr+q = (r-(1+i))(r-(1-i)) = ((r-1)-i)((r-1)+i) = (r-1)^2+1 = r^2-2r+2$. Således är $e^t \sin t$ en lösning till en sådan differentialekvation om $p = -2$ och $q = 2$.

M12. $(D^2 + 2D + I)(e^x + e^{-x}) = 4e^x$

M13. Om rörelsen beskrivs av en differentialekvation av typen $y'' + ay' + by = 0$ så sägs den vara kritiskt dämpad om $a^2 = 4b$, vilket är uppfyllt i detta fall.

M14. Låt $P(D) = D^2 - D - 2I$, där D är deriveringsoperatorn och I är identitetsoperatorn. Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $P(D)y = x^2 \sin x$ så är

$$P(D)(y_1 + y_2) = \underbrace{P(D)y_1}_{x^2\sin x} + \underbrace{P(D)y_2}_{x^2\sin x} = 2x^2 \sin x \neq x^2 \sin x$$

Eller mer allmänt om $P(D)$ är en linjär differentialoperator (som tex $P(D) = D^2 - D - 2I$) så är $P(D)(y_1 + y_2) = P(D)y_1 + P(D)y_2$ så om $P(D)y_1 = f(x)$ och $P(D)y_2 = g(x)$ så är $P(D)(y_1 + y_2) = f(x) + g(x)$. Notera dock att summan av två lösningar också är en lösning om den linjära differentialekvationen också är homogen (se t.ex. påstående 5).

M15. $(D + I)\underbrace{(D - 2I)y}_{y'-2y} = D(y' - 2y) + (y' - 2y) = y'' - 2y' + y' - 2y = y'' - y' - 2y$

M16. T.ex. $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' = 0$