# Sant/falskt-frågor för läsvecka 6

Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. De flesta skall du kunna svara på (och motivera) utan hjälp av papper och penna. Några av dem, som kanske kräver lite extra eftertanke, är markerade med *. Svar och motiveringar finns längre bak i dokumentet men de anges inte i samma ordning som påståendena. Detta p.g.a. att du inte så lätt skall råka se svaret på påståenden du ännu inte funderat över. Numret inom parentes i högermarginalen vid respektive påstående anger vilket nummer i listorna med svar och motiveringar, som hör ihop med respektive påstående.

**1.** Man kan avgöra om en talföljd är konvergent genom att studera de 1000 första elementen i talföljden. (S21)

**2.** Om en talföljd $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergerar mot ett värde $a$ så är $a_k = a$ om bara $k$ är tillräckligt stort. (S40)

**3.** Varje växande talföljd är divergent. (S48)

**4.** Varje konvergent talföljd är begränsad. (S28)

**5.** Varje konvergent talföljd är monoton. (S8)

**6.** Varje monoton och begränsad talföljd är konvergent. (S42)

**7.** $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{n}{n+m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+m}$ (S2)

***8.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (S15)

**9.** Om $a_k b_k \to 0,$ då $k \to \infty$, så måste det vara så att $a_k \to 0$ eller $b_k \to 0$, då $k \to \infty$. (S26)

***10.** Om $a_k \to 0$, då $k \to \infty$, och $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en begränsad talföljd så följer att

$$a_k b_k \to 0, \text{ då } k \to \infty$$

(S18)

**11.** $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ och $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ monotona $\Rightarrow$ $\{a_k + b_k\}_{k=1}^{\infty}$ monoton. (S7)

**12.** $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ och $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergenta $\Rightarrow$ $\{a_k + b_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent. (S24)

**13.** $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ och $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ divergenta $\Rightarrow$ $\{a_k + b_k\}_{k=1}^{\infty}$ divergent. (S41)

**14.** Om $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande talföljd och $f(x)$ en avtagande funktion så är $\{f(a_k)\}_{k=1}^{\infty}$ en växande talföljd. (S11)

***15.** Om $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en talföljd sådana att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ så är också $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 0$. (S35)

***16.** Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ så gäller att

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ konvergent } \Rightarrow \{f(a_k)\}_{k=1}^{\infty} \text{ konvergent}$$

(S14)

***17.** $\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}} f(x)$ existerar $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{Z}^+}} f(n)$ existerar (S30)

**18.** $\sum_{k=0}^{10} A_k = \sum_{k=0}^{10} A_{10-k}$ (S53)

**19.** Om $f(x)$ är en udda funktion så är $\sum_{k=-n}^{n} f(k) = 0$ (S20)

**20.** $\sum_{k=-n}^{n} |a_k| = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ (S44)

**21.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k} + a_{2k-1})$ (S23)

**22.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{1+k^2} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$ (S27)

**23.** Om $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en talföljd sådan att $a_1 = 0$ så är $\displaystyle a_n = \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$ (S9)

**24.** Olle vill avgöra om en viss serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent. Han tar hjälp av sin miniräknare och räknar ut att summan av de 100 första termerna blir ungefär 13.74. Sedan kör han en liten snurra i ett beräkningsprogram och noterar att summan bara ökar till ca. 13.76 om han summerar de 100 000 första termerna. Olle kan då känna sig säker på att serien konvergerar. (S32)

**25.** Om $\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ så är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent om och endast om $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent (S47)

**26.** Partialsummorna till serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ bildar en avtagande talföljd. (S39)

**27.** Värdet på en geometrisk summa kan beräknas om man känner till antalet termer, samt värdet på första och sista termen. (S5)

**28.** $101 + 102 + 103 + ... + 199 = 3(1 + 2 + 3 + ... + 99)$ (S33)

**29.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ , för alla $x \neq 1$ (S17)

* **30.** $2^{1/2}2^{1/4}2^{1/8}2^{1/16}\cdots = 2$ (S50)

* **31.** Om $a_k > 0$, $b_k > 0$, för $k = 1, 2, ..., n$, så gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k a_k \le \sum_{k=1}^{n} k b_k$$ (S34)

**32.** $\displaystyle\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (S36)

**33.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent (S38)

**34.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=100}^{\infty} a_k$ konvergent (S52)

**35.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent (S43)

**36.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ absolutkonvergent (S1)

* **37.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent (S45)

* **38.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent (S25)

**39.** $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent (S54)

* **40.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1$ (S3)

**41.** Varje konvergent serie är antingen absolutkonvergent eller betingat konvergent. (S46)

**42.** En serie med positiva termer är konvergent om och endast om seriens partialsummor bildar en begränsad talföljd. (S49)

* **43.** Om $a_k, k = 1, 2, 3, ...,$ är termerna i en serie och $b_k = a_{2k-1} + a_{2k}, k = 1, 2, 3, ...,$ dvs

$$\underbrace{a_1 + a_2}_{b_1} + \underbrace{a_3 + a_4}_{b_2} + \underbrace{a_5 + a_6}_{b_3} + \underbrace{a_7 + a_8}_{b_4} + ...$$

så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent om och endast om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent. (S13)

* **44.** Värdet på en konvergent serie förändras inte om man kastar om den ordning i vilket termerna summeras. (S29)

* **45.** Om $a_k = \int_k^{k+1} f(x)\,dx$ , $n = 1, 2, 3, ...$ så är $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (S19)

* **46.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+k^2}$ (S37)

**47.** $y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ är en lösning till differentialekvationen $y' = y^2$, på intervallet $(-1, 1)$. (S12)

* **48.** Funktionen $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}$ löser begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} xy'' = y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (S10)

**49.** Potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k$ konvergerar för alla $x \in [0, 2]$ (S51)

**50.** Om en potenserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar för $x = 3$ så konvergerar den även för $x = -2$. (S4)

* **51.** $\int \frac{e^x}{x}\,dx = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}$ (S16)

**52.** Om $P_5(x)$ är Taylorpolynomet av grad 5 kring $x = 1$ för funktionen $f(x) = x^5 + 2x + 1$ så är $P_5(x) = f(x)$ för alla $x$. (S22)

**53.** Om Maclaurinserien för en funktion $f(x)$ börjar med termerna $2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$, och konvergerar för alla $x$, så är $f'''(0) = 2$ (S31)

**54.** Om $p_3(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 5$ är Maclaurinpolynomet av grad 3 till en funktion $f(x)$ så är $f(x)$ avtagande och konvex i en omgivning av origo. (S6)

# Svar

**S1.** Sant (M1)

**S2.** Falskt (M2)

**S3.** Sant (M3)

**S4.** Sant (M4)

**S5.** Sant (M5)

**S6.** Sant (M6)

**S7.** Falskt (M7)

**S8.** Falskt (M8)

**S9.** Sant (M9)

**S10.** Sant (M10)

**S11.** Sant (M11)

**S12.** Sant (M12)

**S13.** Falskt (M13)

**S14.** Sant (M14)

**S15.** Sant (M15)

**S16.** Sant (M16)

**S17.** Falskt (M17)

**S18.** Sant (M18)

**S19.** Falskt (M19)

**S20.** Falskt (M20)

**S21.** Falskt (M21)

**S22.** Sant (M22)

**S23.** Sant (M23)

**S24.** Sant (M24)

**S25.** Falskt (M25)

**S26.** Falskt (M26)

**S27.** Sant (M27)

**S28.** Sant (M28)

**S29.** Falskt (M29)

**S30.** Falskt (M30)

**S31.** Sant (M31)

**S32.** Falskt (M32)

**S33.** Sant (M33)

**S34.** Falskt (M34)

**S35.** Falskt (M35)

**S36.** Falskt (M36)

**S37.** Falskt (M37)

**S38.** Sant (M38)

**S39.** Falskt (M39)

**S40.** Falskt (M40)

**S41.** Falskt (M41)

**S42.** Sant (M42)

**S43.** Falskt (M43)

**S44.** Falskt (M44)

**S45.** Sant (M45)

**S46.** Sant (M46)

**S47.** Sant (M47)

**S48.** Falskt (M48)

**S49.** Sant (M49)

**S50.** Sant (M50)

**S51.** Falskt (M51)

**S52.** Sant (M52)

**S53.** Sant (M53)

**S54.** Falskt (M54)

# Motiveringar

**M1.** $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

**M2.** $VL = 0$ och $HL = 1$.

**M3.** Vi kan uppskatta seriens värde med en integral (se exempel 2 i avsnitt 9.3 i Adams och text som föregår exemplet). I detta fall får vi att;

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{\infty} = 1$$

**M4.** Enligt Sats 17 i avsnitt 9.5 så måste serien konvergera för åtminstone alla $x$ sådana att $|x| < 3$. Speciellt konvergerar den för $x = -2$.

**M5.** En godtycklig geometrisk summa kan skrivas $\sum_{k=m}^{m+p} ar^k$, för några $a, m, p$ och $r$. Om vi känner första termen $ar^m$ och sista termen $ar^{m+p}$ så kan vi räkna ut $r^p$. Om vi dessutom vet antalet termer $p+1$ så kan vi räkna ut $r$. Således kan vi även bestämma värdet på den geometriska summan ty;

$$\sum_{k=m}^{m+p} ar^k = ar^m \sum_{k=0}^{p} r^k$$

**M6.** Från Maclaurins formel följer att;

$$f'(0) = -3 \quad \text{och} \quad \frac{f''(0)}{2!} = 4$$

Eftersom $f(x)$ uppenbarligen är tre gånger deriverbar där $x = 0$ så är speciellt $f'(x)$ och $f''(x)$ kontinuerliga i $x = 0$. Speciellt är $f'(x) < 0$ och $f''(x) > 0$ i en omgivning av $x = 0$, varpå vi kan konstatera att $f(x)$ är avtagande och konvex i en omgivning av $x = 0$.

**M7.** Betrakta t.ex. $a_k = 2^k$ och $b_k = -3^{k-1}$, för $k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

**M8.** Betrakta t.ex. $a_k = (-1)^k/k$, som är konvergent men inte monoton.

**M9.**

$$\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_4 - \ldots a_{n-1}) + (a_n - a_{n-1})$$

$$= (\underbrace{-a_1}_{=0} + \underbrace{a_2) + (-a_2}_{=0} + \underbrace{a_3) + (-a_3}_{=0} + \underbrace{a_4) + (-a_4}_{=0} + \ldots + \underbrace{a_{n-1}) + (-a_{n-1}}_{=0} + a_n) = a_n$$

**M10.** Serien som definierar $y(x)$ är konvergent för alla $x$ så vi tillåts derivera termvis enligt Sats 19 i avsnitt 9.5 i Adams. Vi får då att;

$$xy'' = x\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}\right) = x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{nx^n}{(n!)^2}\right) =$$

$$= x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-1}}{((n-1)!)^2} = y$$

Vidare är $y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n0^n}{(n!)^2} = 0$

och eftersom $y'(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{(n!)^2}$ så är även $y'(0) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 0^{n-1}}{(n!)^2} = 1.$

**M11.** Om $\{a_k\}$ är avtagande så är; $a_{k+1} \leq a_k$, för alla $k$. Om $f(x)$ är avtagande så måste därför $f(a_{k+1}) \geq f(a_k)$, för alla $k$, vilket visar att $\{f(a_k)\}$ är en växande talföljd.

**M12.** $y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, då $x \in (-1, 1)$ och $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$

**M13.** Betrakta t.ex. $a_k = (-1)^k$

**M14.** Antag att $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ och låt $\epsilon$ vara ett godtyckligt tal sådant att $\epsilon > 0$.
Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig i $a$ så finns det något $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, då $|x - a| < \delta$. Vidare finns det något $N$ sådant att $|a_k - a| < \delta$, då $k \geq N$.
Det följer i så fall att $|f(a_k) - f(a)| < \epsilon$ om $k \geq N$,
vilket visar att $\{f(a_k)\}$ konvergerar mot $f(a)$.

**M15.** $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\overbrace{\ln n/n}^{\to 0}} \to 1$ , då $n \to \infty$

**M16.** Vi har $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, för alla $x$, och därmed också $\frac{e^x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$, för alla $x$.
Enligt Sats 19 i avsnitt 9.5 i Adams tillåts vi integrera termvis och får då att;

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\right) dx = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}$$

**M17.** Den geometriska serien konvergerar bara för $x$ sådana att $|x| < 1$.

**M18.** Låt $\epsilon$ vara ett godtyckligt tal sådant att $\epsilon > 0$.
Om $b_k$ är begränsad så finns det något $M$ sådant att $|b_k| \leq M$ för alla $k$.
Om dessutom $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ så finns det något $N$ sådant att $|a_k| < \epsilon/M$ för alla $k \geq N$.
Det följer i så fall att $|a_k b_k| = |a_k||b_k| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$ om $k \geq N$,
vilket visar att $a_k b_k \to 0$ då $k \to \infty$.

**M19.** Betrakta t.ex. $f(x) = \sin(2\pi x)$

**M20.** Om $f(x)$ är udda så är $\sum_{k=-n}^{n} f(k) = f(0)$

**M21.** Värdet på ändligt många tal i en talföljd säger inget om konvergensen.

**M22.** Följer av entydighetssatsen för Taylorutvecklingar (se Sats 13 i avsnitt 4.10 i Adams)

**M23.**

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ... + a_{2n-1} + a_{2n} =$$

$$= (a_2 + a_1) + (a_4 + a_3) + (a_6 + a_5) + ... + (a_{2n} + a_{2n-1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k} + a_{2k-1})$$

**M24.** Se markerad ruta innan exempel 5 i avsnitt 9.1 i Adams.

**M25.** Betrakta tex $a_k = (-1)^k/\sqrt{k}$

**M26.** Betrakta t.ex. $a_k = 1 - (-1)^k$ och $b_k = a_{k+1}$. I så fall är $a_k b_k = 0$, för alla $k$, men varken $\{a_k\}$ eller $\{b_k\}$ är konvergenta.

**M27.** Alla faktorer som termerna i en summa har gemensamt kan brytas ut ur summan (med distributiva lagen). I detta fall innehåller alla termerna faktorn $n$.

**M28.** Se Sats 1 i avsnitt 9.1 i Adams.

**M29.** Se Sats 16 i avsnitt 9.4 i Adams.

**M30.** Implikationen $\Rightarrow$ är uppenbarligen sann men inte den omvända implikationen. Betrakta t.ex. $f(x) = \sin(2\pi x)$.

**M31.** Koefficienten framför $x^3$ i Maclaurinserien för $f(x)$ är enligt formeln $\dfrac{f'''(0)}{3!}$. I detta fall måste vi därför ha $\dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{1}{3}$ dvs. $f'''(0) = 2$.

**M32.** Ändligt många termer har ingen påverkan på konvergensen, hur många termer man än tar med.

**M33.** Likheten kan verifieras på många sätt t.ex. genom att beräkna båda led med bl.a. formel för aritmetiska summor men som träning på lite manipulerande av summor kan följande vara ett alternativ;

$$VL = \sum_{k=1}^{99}(100 + k) = \sum_{k=1}^{99}(100 - k + 2k) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{99}(100 - k)}_{\sum_{k=1}^{99} k} + 2\sum_{k=1}^{99} k = \sum_{k=1}^{99} k + 2\sum_{k=1}^{99} k = 3\sum_{k=1}^{99} k = HL$$

**M34.** T.ex. är $1 + 3 \leq 4 + 1$ men $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 > 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1$

**M35.** Betrakta t.ex. $a_n = e^{-n}$.

**M36.** Betrakta t.ex. $a_k = 1/k$ eller vilken annan konvergent talföljd som helst som är sådan att $a_k \to a \neq 0$ då $k \to \infty$.

**M37.** $HL = 0$, men $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + k^2} > \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} > \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2}$, för alla $n$.

**M38.** Om $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så måste det vara så att $a_k \to 0$, då $k \to \infty$ (se Sats 4 i avsnitt 9.2 i Adams). Speciellt är alltså talföljden $\{a_k\}$ konvergent.

**M39.** $\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + k}$ är växande eftersom $\displaystyle s_{n+1} - s_n = \frac{1}{1 + (n + 1)^2} \geq 0$

**M40.** Att talföljden konvergerar mot $a$ betyder bara att talen i talföljden närmar sig värdet a. Inget tal i talföljden behöver anta värdet $a$. Om tex. $a_k = 1/k$ så kommer $a_k \to 0$ då $k \to \infty$, men $a_k \neq 0$ för alla $k$.

**M41.** Betrakta t.ex. $a_k = 1 - (-1)^k$ och $b_k = a_{k+1}$.

**M42.** Se markerad ruta efter Sats 1 i avsnitt 9.1 i Adams.

**M43.** Betrakta t.ex. $a_k = (-1)^k/k$

**M44.** Om det inte finns något samband mellan termerna med negativa index och de med positiva index så finns det ingen anledning till varför de båda leden skulle vara lika. Om talföljden t.ex. är jämn (dvs. $a_{-k} = a_k$) eller udda (dvs. $a_{-k} = -a_k$) så är det dock sant.

**M45.** Om $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent så måste det vara så att $|a_k| \to 0$, då $k \to \infty$.
Speciellt är $|a_k| < 1$, för tillräckligt stora $k$, säg $k \geq N$.
Det följer då att $0 \leq a_k^2 = |a_k| \cdot |a_k| \leq |a_k|$, då $k \geq N$.
Eftersom $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent så måste därför även $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ vara konvergent enligt jämförelsekriteriet i Sats 9 i avsnitt 9.3 i Adams.

**M46.** En konvergent serie som inte är absolutkonvergent är per definition betingat konvergent.

**M47.** Det är så konvergens av serie definieras.

**M48.** Betrakta t.ex. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, där $a_k = -1/k$, som är växande och konvergerar mot 0.

**M49.** Om termerna i en serie är positiva så bildar seriens partialsummor en växande talföljd, och en växande talföljd är konvergent om och endast om den är begränsad (se påstående 4 och markerad ruta efter Sats 1 i avsnitt 9.1 i Adams).

**M50.** $2^{1/2}2^{1/4}2^{1/8}2^{1/16}\cdots = 2^s$, där $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}} = 1$

**M51.** Då $x = 2$ erhålls den harmoniska serien som är divergent. Den konvergerar dock för alla andra $x$ i intervallet.

**M52.** Ändligt många termer i en serie påverkar inte dess konvergens (se Sats 5 i avsnitt 9.2 i Adams).

**M53.** $VL = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_8 + A_9 + A_{10}$ summerad i omvända ordningen ger
$HL = A_{10} + A_9 + A_8 + ... + A_2 + A_1 + A_0$

**M54.** Betrakta t.ex. $f(x) = \sin(2\pi x)$ eller $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ då } x \text{ är ett heltal} \\ 0 & , \text{ för övriga } x \end{cases}$