MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Datum: 2013-11-21

Överbetygstest 1

Matematisk analys i en variabel (TMV130)

Hjälpmedel: formelblad och ordlista från kurshemsidan, ej räknedosa

---

Namn: ....

Personnummer: ....

Poäng/Kryss

På denna sida skall lösningen på uppgift 3 presenteras:

1 Beräkna integralen $\int_{-1}^{1}(3x+4)\,dx$ genom ett gränsvärde av Riemannsummor;

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \qquad \text{(2p)}$$

Lösning: Med $f(x)=3x+4$, $c_k=x_k=-1+2\frac{k}{n}$ får vi;

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(3(-1+2\frac{k}{n})+4\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(1+6\frac{k}{n}\right)\frac{2}{n}=$$

$$=\frac{2}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{=n}+\frac{12}{n^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{n(n+1)/2}=2+\frac{6(n+1)}{n}=8+\frac{6}{n}\to 8\ ,\ \text{då } n\to\infty$$

Svar: $\int_{-1}^{1}(3x+4)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3(-1+2\frac{k}{n})+4\right)\frac{2}{n}=8$

---

2 Avgör om följande två påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar (rätt svar utan bra motivering ger inga poäng).

(a) Om $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\geq 0$ och $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\geq 0$ så är $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx\geq 0$ (1p)

Svar och motivering: Påståendet är **Falskt**.
Sätt $A=\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$, $B=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ och $C=\int_{1}^{2} f(x)\,dx$
A, B och C kan anta alla värden oberoende av varandra. Om vi väljer $f(x)$ så att $A<0, C<0$ och sedan väljer B sådan att $A+C<-B\leq min(A,C)$ så kommer

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx=A+B\geq 0\ ,\ \int_{-1}^{2} f(x)\,dx=B+C\geq 0\ ,\ \text{ men } \int_{-2}^{2} f(x)\,dx=A+B+C<0$$

En konkret funktion som motsäger påståendet är t.ex. $f(x)=\begin{cases} 2 & ,\ \text{då } |x|\leq 1\\ -3 & ,\ \text{för övriga } x\end{cases}$

(b) Integralen $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t}e^{-t}\,dt$ är konvergent. (1p)

Svar och motivering: Påståendet är **Sant**.
Följer av Sats 3 i avs 6.5 ty $0\leq\frac{1}{t}e^{-t}\leq e^{-t}$, för alla $t\geq 1$, och $\int_{1}^{\infty}e^{-t}\,dt$ är konvergent ty $\int_{1}^{\infty}e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_1^{\infty}=\frac{1}{e}$.

---

3 Formulera och bevisa satsen om substitution i bestämda integraler. (2p)
(vänd blad och skriv satsen och beviset på första sidan).

Svar: Se föreläsningsanteckningar eller Sats 6 i avs. 5.6.