MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Datum: 2013-12-05

Överbetygstest 2

Matematisk analys i en variabel (TMV130)

Hjälpmedel: formelblad och ordlista från kurshemsidan, ej räknedosa

---

Namn: ....

Personnummer: ....

Poäng/Kryss

På denna sida skall lösningen på uppgift 3 presenteras:

1 Lös integralekvationen $y(x)^3 + 1 = \int_0^x (y(t)^3 - 1)\, dt$ (2p)

Lösning: Om vi sätter $z(x) = y(x)^3 - 1$ så kan integralekvationen skrivas;

$$z(x) + 2 = \int_0^x z(t)\, dt$$

Deriverar vi båda led i denna ekvation får vi differentialekvationen $z' = z$, som vi vet har lösningarna $z = Ce^x$ ($z' = z \Leftrightarrow z' - z = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}z) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}z = C \Leftrightarrow z = Ce^x$). Sätter vi $x = 0$ i integralekvationens båda led får vi också villkoret $z(0) + 2 = 0$ dvs $z(0) = -2$, vilket ger oss lösningen $z = -2e^x$. Således är $y^3 - 1 = -2e^x$ dvs. $y = (1 - 2e^x)^{1/3}$.

Anm. Integralekvationen går även bra att lösa utan att göra substitutionen $z = y^3 - 1$. Om vi deriverar båda led i integralekvationen m.a.p. x får vi att

$$3y^2y' = y^3 - 1 \Leftrightarrow \frac{3y^2}{y^3 - 1}dy = dx \Leftrightarrow \int \frac{3y^2}{y^3 - 1}dy = \int dx \Leftrightarrow$$

$$\ln|y^3 - 1| = x + D \Leftrightarrow |y^3 - 1| = e^{x+D} \Leftrightarrow y^3 - 1 = \underbrace{\pm e^D}_{=C} e^x \Leftrightarrow y^3 = 1 + Ce^x$$

Värdet på C kan bestämmas som ovan.

Svar: $y = (1 - 2e^x)^{1/3}$

---

2 Avgör om följande två påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar (rätt svar utan bra motivering ger inga poäng).

(a) Alla lösningar till differentialekvationen $y' = \dfrac{\sin x}{1 + y^2}$ har ett lokalt minimum där $x = 0$ (1p)

Svar och motivering: *Sant*
Vi avläser direkt ur ekvationen att $y'(x) \leq 0$, då $-\pi \leq x \leq 0$, och att $y'(x) \geq 0$, då $0 \leq x \leq \pi$. Så lösningarna är avtagande på intervallet $[-\pi, 0]$ och växande på intervallet $[0, \pi]$, vilket visar att de måste anta ett minimum vid $x = 0$.

(b) Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är två olika lösningar till differentialekvationen $y' = \dfrac{\sin x}{1 + y^2}$ så är även $y_1(x) + y_2(x)$ en lösning till samma differentialekvation. (1p)

Svar och motivering: *Falskt*
För differentialekvationer som är linjära och homogena kommer en summa av lösningar också att vara en lösning, i annat fall är det i allmänhet inte sant. Låt t.ex. $y_1(x)$ och $y_2(x)$ vara lösningarna genom punkterna $(\frac{\pi}{2}, 0)$ resp $(\frac{\pi}{2}, 1)$. I så fall är

$$y_1'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 + y_1(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{1 + 0^2} = 1 \text{ och } y_2'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 + y_2(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

Om $z = y_1 + y_2$ också vore en lösning så skulle vi ha

$$z'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 + z(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

vilket uppenbarligen inte är detsamma som $y_1'(\frac{\pi}{2}) + y_2'(\frac{\pi}{2})$.

---

3 Visa att lösningarna till en linjär och homogen differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter har formen $y = (C_1x + C_2)e^{rx}$, då differentialekvationens karakteristiska ekvation har en dubbelrot r (vänd blad och skriv beviset på första sidan). (2p)