Lösningsförslag till tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

131218 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anders Martinsson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

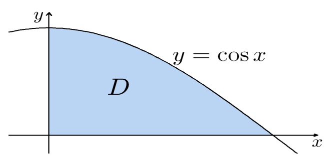
Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.



2. Låt D vara det område i första kvadranten som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = \cos x$ (se figur).

(a) Beräkna volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring x-axeln. (3p)

Lösning: Skivmetoden ger att;

$$Volymen = \int_0^{\pi/2} \pi \cos^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Svar: $\pi^2/4$

(b) Beräkna volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring y-axeln. (3p)

Lösning: Metoden med cylinderskal ger att;

$$Volymen = \int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x\, dx = 2\pi\left(\left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi^2 - 2\pi$$

Svar: $\pi^2 - 2\pi$

3. En enkel modell för avsvalning är att anta att temperaturen i en kropp förändras med en hastighet som är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kroppen själv och omgivningen. dvs.

$$T'(t) = k(T(t) - T_{omg})$$

Där $T(t)$ är temperaturen (mätt i $^\circ C$) efter t sekunder, T_{omg} är omgivande temperatur och k är någon proportionalitetskonstant.

(a) Lös differentialekvationen med lösningsmetod för linjära differentialekvationer av första ordningen (redovisa alla steg och ange lösningen på explicit form). (3p)

Lösning: Differentialekvationen kan skrivas $T' - kT = -kT_{omg}$, och kan lösas genom att multiplicera båda led med den integrerande faktorn $e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$. Vi får då att;

$$T' - kT = -kT_{omg} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-kt}T\right) = -kT_{omg}e^{-kt} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-kt}T = T_{omg}e^{-kt} + C \quad \Leftrightarrow \quad T = T_{omg} + Ce^{kt}$$

Svar: $T(t) = T_{omg} + Ce^{kt}$

(b) Lös differentialekvationen med lösningsmetoden för separabla differentialekvationer (redovisa alla steg och ange lösningen på explicit form). (3p)

Lösning: Om $T \neq T_{omg}$ får vi att;

$$T' = k(T - T_{omg}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{T - T_{omg}} = k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dT}{T - T_{omg}} = \int k\,dt \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|T - T_{omg}| = kt + D \quad \Leftrightarrow \quad |T - T_{omg}| = e^{kt+D} \quad \Leftrightarrow$$

$$T - T_{omg} = \underbrace{\pm e^{D}}_{=C} e^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad T = T_{omg} + Ce^{kt}$$

Notera här att $C = \pm e^{D} \neq 0$, men vi ser (genom insättning i differentialekvationen) att även $T \equiv T_{omg}$ är en lösning så vi konstaterar att alla lösningar kan skrivas på formen $T = T_{omg} + Ce^{kt}$, för någon konstant C.

Svar: $T(t) = T_{omg} + Ce^{kt}$

4. (a) Bestäm Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2, kring $x = 9$, för funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. (3p)

Lösning: Vi har;

$$f(x) = x^{1/2} \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad , \quad f''(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2}$$

och speciellt är $f(9) = 3$, $f'(9) = \frac{1}{6}$, $f''(9) = \frac{-1}{108}$ så;

Svar: $P_2(x) = 3 + \dfrac{1}{6}(x-9) - \dfrac{1}{216}(x-9)^2$

(b) Använd Taylorpolynomet i (a) för att beräkna $\sqrt{10}$ approximativt. Uppskatta även felet i din approximation genom att studera resttermen $E_2(x)$. (3p)

Lösning: Vi har $f(10) \approx P_2(10) = 3 + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{216} = \dfrac{648 + 36 - 1}{216} = \dfrac{683}{216}$.

Eftersom $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$ så är $E_2(x) = \dfrac{1}{3!}f'''(s)(x-9)^3 = \dfrac{1}{16}s^{-5/2}(x-9)^3$,

där s är ett tal mellan x och 9. Vidare får vi att;

$$|f(10) - P_2(10)| = |E_2(10)| = \frac{1}{16}s^{-5/2}(10-9)^3 \leq \frac{1}{16 \cdot 3^5} = \frac{1}{3888}$$

Svar: $\sqrt{10} \approx \dfrac{683}{216}$ med ett absolut fel som är mindre än $\dfrac{1}{3888}$

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. En regndroppe faller från ett moln. Droppen antas hela tiden vara sfärisk. På väg ned mot marken avdunstar droppen så att dess volym minskar med en hastighet som i varje ögonblick är proportionell mot ytan av regndroppen. Vid en viss tidpunkt har regndroppen volymen $1\,mm^3$, och en minut senare är volymen $\frac{1}{8}\,mm^3$. Hur lång tid ytterligare tar det för droppen att helt avdunsta bort, så att inget av droppen återstår, förutsatt att den inte hinner träffa marken. (6p)

Tips: Du behöver känna till ett samband mellan volymen av ett klot och arean av dess sfäriska begränsningsyta. Om du inte minns ett sådant samband så kan du t.ex. beräkna volymen och arean med metoder från kursen, genom att betrakta klotet som en rotationskropp och sfären som en rotationsyta.

Lösning: Volymen av ett klot med radie r är $V = 4\pi r^3/3$ och arean av motsvarande sfär är $A = 4\pi r^2$. För att lösa uppgiften räcker det dock att veta att $A = C \cdot V^{2/3}$, för någon konstant C. Om vi låter $V(t)$ vara droppens volym efter t minuter så ger beskrivningen i texten att $V' = k \cdot V^{2/3}$. Denna differentialekvation är separabel med lösningarna;

$$V(t) = (\frac{1}{3}kt + C)^3$$

Villkoren $V(0) = 1$ och $V(1) = \frac{1}{8}$ ger att $C = 1$ och $k = -3/2$, så $V(t) = (1 - \frac{t}{2})^3$. Det följer speciellt att volymen blir 0 då $t = 2$.

Svar: Efter ytterligare 1 minut är droppen borta.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion för $x \geq 0$ så är

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent om och endast om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent. (2p)

Svar och motivering: *Falskt*, ty utan några villkor på $f(x)$ så är värdet på en integral oberoende av enstaka funktionsvärden så generellt finns inget samband mellan konvergensen av en integral och konvergensen av motsvarande summa. Betrakta t.ex.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ då } x \text{ är ett heltal} \\ 0 & , \text{ för övriga } x \end{cases} \quad \text{resp.} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ då } x \text{ är ett heltal} \\ 1 & , \text{ för övriga } x \end{cases}$$

(b) $y = x^2$ är en ortogonalkurva till kurvskaran $x^2 + 2y^2 = C$ (dvs. parabeln skär alla sådana ellipser med rät vinkel). (2p)

Svar och motivering: *Sant*, ty kurvskaran $x^2 + 2y^2 = C$ kan beskrivas som lösningarna till differentialekvationen $x + 2yy' = 0$ och dess ortogonalkurvor kan beskrivas som lösningarna till differentialekvationen $x - 2y/y' = 0$. Det är lätt att verifiera att $y = x^2$ är en lösning till denna senare differentialekvation och därför är en ortogonalkurva till kurvskaran $x^2 + 2y^2 = C$.

(c) Om $P_2(x) = 2 - x + x^2$ är Taylorpolynomet av grad 2, kring $x = 1$, till en funktion $f(x)$ så är $f(x)$ avtagande i en omgivning av punkten $x = 1$. (2p)

Svar och motivering: *Falskt*, ty notera att $P_2(x) = 2 + (x - 1) + (x - 1)^2$ så av Taylors formel följer därför att $f'(1) = 1$. Eftersom $f''(1)$ uppenbarligen existerar så är speciellt $f'(x)$ kontinuerlig i $x = 1$. Speciellt är $f'(x) > 0$ i en omgivning av $x = 1$, varpå det följer att $f(x)$ är växande i en omgivning av $x = 1$. Alternativt räcker det att ge ett motexempel för att visa att påståendet är falskt och enklast är då att betrakta $f(x) = 2 - x + x^2$.

7. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (6p)

Lösning Se föreläsningsanteckningar eller Sats 4 i avsnitt 5.4 (sid 308) i Adams.

Anonym kod	**TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 131218**	sid nr. **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm tangentlinjen till den plana kurvan $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t^2+1 \end{cases}$ i punkten $(3, 2)$. (2p)

Lösning: Punkten $(3, 2)$ motsvarar $t = 1$ i parametriseringen av kurvan. Tangentens riktningskoefficient är därför $k = y'(1)/x'(1) = 2/2 = 1$ och tangenten beskrivs av ekvationen $y - 2 = k(x - 3)$ dvs.

Svar: $y = x - 1$

(b) Beräkna översumman $U(f, P_3)$ till integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$, där $f(x) = 1 + x - x^2$ och P_3 betecknar indelningen av intervallet $[0, 1]$ i tre lika stora delintervall. (3p)

Lösning: Vi delar in intervallet $[0, 1]$ i de tre delintervallen $[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$. Kvadratkomplettering ger att $f(x) = \frac{5}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ så vi ser att funktionens största värde på de tre delintervallen är $f(\frac{1}{3}), f(\frac{1}{2})$ resp. $f(\frac{2}{3})$ vilket ger oss;

$$U(f, P_3) = \frac{1}{3}\left(f(1/3) + f(1/2) + f(2/3)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{9} + \frac{5}{4} + \frac{11}{9}\right) = \frac{133}{108}$$

Svar: $U(f, P_3) = 133/108$

(c) Bestäm integralen $\int \frac{x}{(1+x^2)(1-x^2)}\,dx$ (3p)

Lösning:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)(1-x^2)}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)(1-t)}\,dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| + C$$

Svar: $\int \frac{x}{(1+x^2)(1-x^2)}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| + C$

(d) Avgör om serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{3^{k+2}}$ är konvergent och bestäm i så fall dess värde. (3p)

Lösning: Vi har;

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3+2^k}{3^{k+2}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k \to \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

då $n \to \infty$

Svar: Serien är konvergent med värdet 5/6

(e) Visa att $y(t) = te^{2t}$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 3e^{2t}$ och bestäm alla andra lösningar. (3p)

Lösning: Vi har;

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(te^{2t}\right) - \frac{d}{dt}\left(te^{2t}\right) - 2te^{2t} = (4+4t)e^{2t} - (1+2t)e^{2t} - 2te^{2t} = 3e^{2t}$$

Eftersom differentialekvationen är linjär med konstanta koefficienter och dess karakteristiska ekvation $r^2 - r - 2 = 0$ har rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = 2$ så har motsvarande homogena ekvation lösningarna $y_h = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$. Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen blir således;

Svar: $y = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + te^{2t}$