Laborationstillfälle 2 – Ickelinjära ekvationer

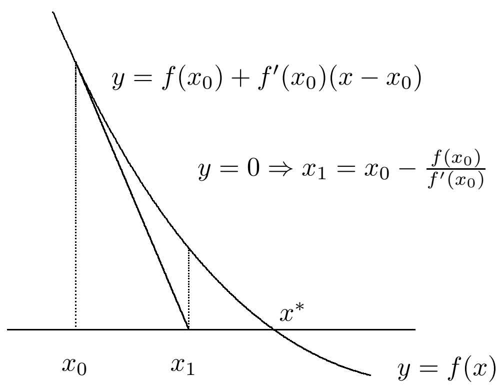
Vi skall se lite mer utförligt på lösning av ickelinjära ekvationer..

Målsättning vid labtillfälle 2: Klara av laborationsuppgift 1. Innan denna läser man hela texten och gör samtliga övningar.

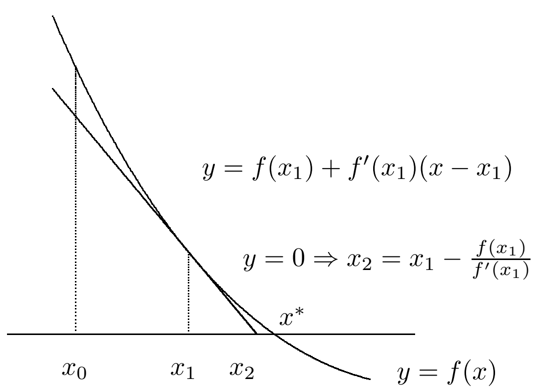
Vi skall lösa ekvationen $f(x) = 0$. En lösning x^* till ekvationen uppfyller $f(x^*) = 0$ och kallas en *rot* till ekvationen eller ett *nollställe* till funktionen f.

Newtons metod

Antag att x_0 är en approximation av en rot till ekvationen $f(x) = 0$. Följ tangenten i punkten $(x_0, f(x_0))$, dvs. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, ned till x-axeln ($y = 0$) och tag skärningspunktens x-koordinat, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, som en ny approximation av roten.



Nu upprepar vi. Vi följer tangenten i $(x_1, f(x_1))$, dvs. $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$, ned till x-axeln ($y = 0$) och tag skärningspunktens x-koordinat, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, som en ny approximation av roten.

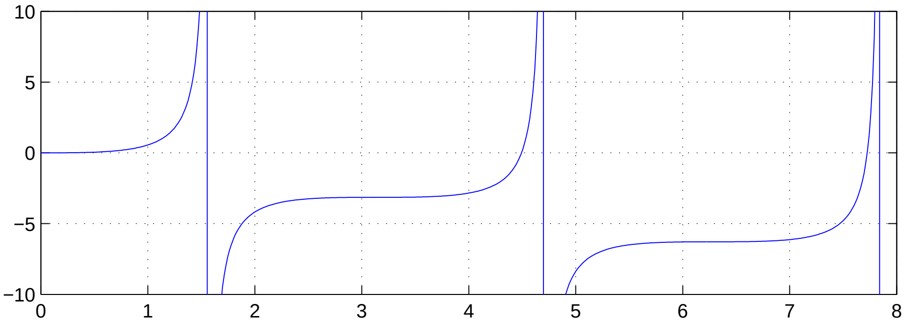


Allmänt kan **Newtons metod** formuleras; Givet en approximativ lösning x_0 av $f(x) = 0$, bestäm en följd av approximationer $\{x_k\}$ enligt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \; k = 0, 1, \cdots$$

Denna metod kallas även Newton-Raphsons metod (se sid. 228 i läroboken).

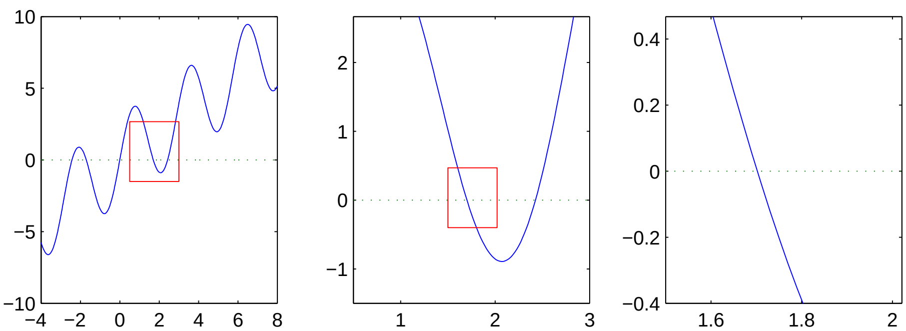
Exempel 1.
Vi skall bestämma den minsta positiva roten till $f(x) = \tan(x) - x = 0$. (Denna ekvation uppstår bl.a. i hållfasthetsläran.)



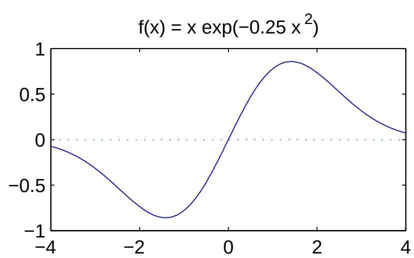
Vår funktion: $f(x) = \tan(x) - x = 0$. Vi behöver också derivatan $f'(x) = \tan^2(x)$.

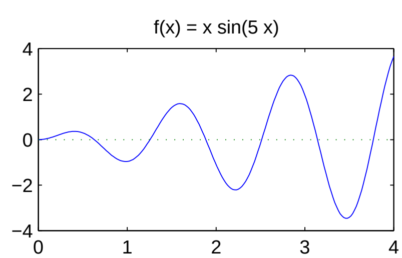
```
>> x=linspace(0,8,500);
>> plot(x,tan(x)-x), axis([0 8 -10 10]), grid on
>> [x,y]=ginput(1); f=tan(x)-x; disp([x,f])
>> for k=1:5
      f=tan(x)-x; fp=tan(x)^2;
      x=x-f/fp; f=tan(x)-x; disp([x,f])
   end
```

Newton bygger på att om vi zoomar in på en graf så blir den allt mer linjär.



Om startapproximationen ligger tillräckligt nära roten så konvergerar metoden snabbt mot denna. Nära roten får vi ungefär en fördubbling av antalet korrekta decimaler i varje iteration. Olämplig startapproximation kan dock leda till att Newtons metod konvergerar mot annan rot eller att den divergerar.



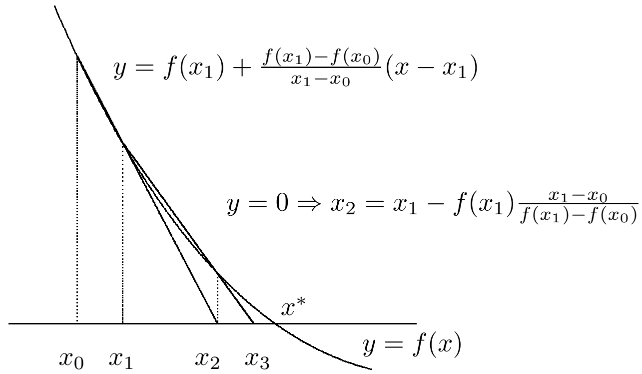


Försöker man lösa evationen $f(x) = 0$ med funktionen till vänster så får vi konvergens då $|x| < 1$ och divergens då $|x| > 1$. Med funktionen till höger gäller att om vi får konvergens behöver det inte vara mot den rot som ligger närmast startapproximationen.

Övning 1. Hitta några positiva rötter tiil ekvationen $f(x) = x\sin(5x) = 0$ med Newtons metod. Pröva olika startapproximationer och se mot vilken rot ni får konvergens. Gör en **script**-fil.

Sekantmetoden

För att få en metod som inte använder derivator kan vi tänka oss att vi har två approximationer x_0 och x_1 av lösningen till $f(x) = 0$ och drar en sekant, istället för en tangent, som vi följer tills den skär x-axeln. Skärningens x-koordinat kallar vi x_2.



Allmänt kan **sekantmetoden** formuleras; Givet två approximationer x_0 och x_1 av lösningen till $f(x) = 0$, bestäm en följd av approximationer $\{x_k\}$ enligt

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \; k = 1, 2, \cdots$$

Exempel 2. Samma ekvation $f(x) = \tan x - x = 0$.

```
>> [x0,y]=ginput(1); [x1,y]=ginput(1);
>> f0=tan(x0)-x0; f1=tan(x1)-x1;
>> disp([x0 f0]), disp([x1 f1])
>> for k=2:10
       x=x1-f1*(x1-x0)/(f1-f0);
       f=tan(x)-x; disp([x f])
       x0=x1; x1=x; f0=f1; f1=f;
   end
```

Man får inte riktigt lika snabb konvergensen som för Newtons metod. Eftersom varje iteration kräver endast en funktionsberäkning är ofta sekantmetoden trots allt effektivare än Newtons metod.

Vi kan också se sekantmetoden som en ersättning av $f'(x^{(k)})$ i Newtons metod med en differensapproximation

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Differensapproximationer kommer vi bl.a. arbeta med vid nästa labtillfälle.

Övning 2. Använd sekantmetoden på samma ekvation som i övning 1.

Lösningsnoggrannhet

Antag att $\bar{x}$ approximativ lösning, med $f(\bar{x}) \neq 0$, och att x^* är den exakta lösningen. Hur bra är approximationen, dvs. hur nära x^* ligger $\bar{x}$?

Eftersom $f(x^*) = 0$ ger medelvärdessatsen;

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(x^*) = f'(\xi)(\bar{x} - x^*)$$

varav följer att

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m} \approx \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|},$$

om man vet att $|f'(x)| \geq m$ i ett intervall som innehåller $\bar{x}$ och x^*. Om intervallet är litet, och derivatan inte varierar mycket, så är ju $|f'(x)| \approx m$ i intervallet.

Exempel 3. Se på funktionen $f(x) = x^2 \exp(-x) - 0.2$, plotta grafen! Ekvationen $f(x) = 0$ har tre rötter. Om de erhållna närmevärdena är $\bar{x}_1 = -0.37$ $\bar{x}_2 = 0.61$, och $\bar{x}_3 = 4.75$, så ger ovanstående approximativa felkalkyl (med felgränser avrundade uppåt): $x_1^* = -0.37 \pm 0.0015$, $x_2^* = 0.61 \pm 0.0048$ och $x_3^* = 4.75 \pm 0.043$. Om grafen är brant, medför en liten avvikelse i y-led (dvs skillnaden mellan $f(\bar{x})$ och noll) en liten avvikelse i x-led.

En alternativ feluppskattning (som bara förutsätter att f är kontinuerlig): Om $f(\bar{x} - E)$ och $f(\bar{x} + E)$ har olika tecken för ett *litet tal* E, så är $|\bar{x} - x^*| < E$. Vi har vanligen kännedom om ungefärliga avståndet till eventuella övriga rötter då vi väljer E.

Lösningar till övningsuppgifter

1.
```
x=linspace(0,4,500); y=x.*sin(5*x); plot(x,y), grid on
[x0,y]=ginput(1);
f0=x0*sin(5*x0); disp([x0,f0])
for k=1:10
   fp=sin(5*x0)+5*x0*cos(5*x0);
   x=x0-f0/fp;
   f=x*sin(5*x); disp([x,f])
   if abs(x-x0)<0.5e-6, break, end
   x0=x; f0=f;
end
```

2.
```
x=linspace(0,4,500); y=x.*sin(5*x); plot(x,y), grid on
[x0,y]=ginput(1);
f0=x0*sin(5*x0); disp([x0,f0])
[x1,y]=ginput(1);
f1=x1*sin(5*x1); disp([x1,f1])
for k=1:10
   x=x1-f1*(x1-x0)/(f1-f0);
   f=x*sin(5*x); disp([x,f])
   if abs(x-x1)<0.5e-6, break, end
   x0=x1; x1=x; f0=f1; f1=f;
end
```

Laborationsuppgift 1.

Skriv en funktionsfil för användning av **Newtons metod**. Indata: funktionen och dess derivata, ett startvärde och antalet iterationer. Utdata: en tabell med alla iteraten $x_0, x_1, x_2, ...x_n$ (i kolonn). Använd den för att lösa följande deluppgifter:

(a) Ekvationen $(5 - x)\exp(x) = 5$ uppstår då man härleder en viss fysikalisk lag. Bestäm den positiva roten till ekvationen med **Newtons metod**. Approximationen skall ha fem korrekta decimaler. Gör en feluppskattning med hjälp av medelvärdessatsen.

(b) Lös ekvationen $10xe^{-x} = -1$ med **Newtons metod**. Pröva startvärdena 2, 1 och 0,5. Förklara de olika utfallen!

Glöm inte att läsa på materialet för nästa veckas laborationstillfälle!

Nytt **kommando** i MATLAB som vi använt vid detta labtillfälle.

disp – avskalad utskrift.

Glöm inte att läsa hjälptexterna – det är med deras hjälp vi skall klara oss själva en dag.
