Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, TMV136

2009 04 17 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: David Heintz, 0762 72 18 60
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2008 ingår.
Besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/0809/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. (a) Beräkna $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx.$ (4p)

   (b) Beräkna $\int_1^e \ln x^2 dx$ (4p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - 2y = e^{2x}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1.$ (6p)

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = (y^2 + 1)x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 0.$ (6p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet
   $y'' + y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ (6p)

5. Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{x^2}{4} - \ln\sqrt{x}$ för $1 \leq x \leq 4.$ (6p)

6. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x \arctan x - x^2}$ (6p)

7. Undesök om serierna konvergerar eller ej.
   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln(1+n) - \ln n).$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi(n + 1/n).$ (5p)

8. Låt $f(x)$ vara en positiv funktion definierad på intervallet $[a, b]$, $a > 0$. Ange en integralformel för att beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ roterar kring

   (a) x-axeln.

   (b) y-axeln.

   (c) Rita figurer och motivera dessa formler geometriskt. (7p)

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$