Matematisk analys i en variabel, E1 (TMV136) 090821

1. Multiplicera båda leden av denna *linjära differentialekvation* med den *integrerande faktorn* e^{-x} och skriv om vänsterledet som en derivata: $e^{-x}(y'-y) = e^{-x}e^x \quad \Leftrightarrow \quad (e^{-x}y)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}y = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = (x+C)e^x$ och $y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ Svar: $\mathbf{y = xe^x}$

---

2. Differentialekvationen är separabel (men också linjär) $\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = x^2\,dx$ och lösningen ges då genom integration: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx + C \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = C'e^{\frac{x^3}{3}}$ där $C' = e^{-\frac{1}{3}}$. Svar: $\mathbf{y = e^{\frac{x^3-1}{3}}}$

---

3. Allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y'' - 3y' + 2y = 0$ och **en** lösning y_p till den inhomogena ekvationen ger att alla lösningar till den senare kan skrivas $y_h + y_p$. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har rötterna $r = 1,\ r = 2$, så att $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Ansätt $y_p = Ae^{5x} \Rightarrow y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 12Ae^{5x}$, varför $A = \frac{1}{12}$ och $y_p = \frac{1}{12}e^{5x}$. Allmänna lösningen är alltså $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$. Begynneslsevillkoren ger slutligen $C_1 = \frac{1}{12},\ C_2 = 0$. Svar: $\mathbf{y = \frac{1}{12}(e^x + e^{5x})}$

---

4. a) Använd partiell integration: $\int_0^1 2x\arctan x\,dx = [\text{PI}] = [x^2\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \arctan 1 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{x^2+1})\,dx = \frac{\pi}{4} - [x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - (1 - \frac{\pi}{4}) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$

   b) Substituera hela rotuttrycket (annars går det att substituera en rot i taget): $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx = \Big\{t = \sqrt{\sqrt{x}+1},\ x = (t^2-1)^2,\ dx = 4t(t^2-1)dt\Big\} = \text{Nya gränser!} = \int_{\sqrt{3}}^2 4(t^2-1)\,dt = \Big[4(\frac{t^3}{3} - t)\Big]_{\sqrt{3}}^2 = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$

---

5. a) Det gäller att $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)$ och $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$ Sätt in $t = x^3$ i dessa utvecklingar ger $f(x) = \big(1 - (1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} + O(x^{18}))\big)\big(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + O(x^{12})\big) = \frac{x^9}{2} - \frac{x^{12}}{4} + \frac{x^{15}}{8} + O(x^{18})$ Maclaurinpolynomet av grad 15 är alltså $\boldsymbol{\frac{x^9}{2} - \frac{x^{12}}{4} + \frac{x^{15}}{8}}$.
   b) Genom att jämföra koefficienterna i Maclaurinpolynomet ovan med det generella uttrycket för dessa, dvs $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, får vi: $\frac{f^{(9)}(0)}{9!} = \frac{1}{2},\ \frac{f^{(12)}(0)}{12!} = -\frac{1}{4},\ \frac{f^{(15)}(0)}{15!} = \frac{1}{8}$. Svar: $\mathbf{f^{(9)}(0) = \frac{9!}{2},\ f^{(12)}(0) = -\frac{12!}{4},\ f^{(15)}(0) = \frac{15!}{8}}$. Övriga sökta derivator är noll.

---

6. Felet består i att integranden är odefinierad i $x = -\frac{1}{2}$. För att kunna ge integralen en mening, måste vi dela upp den i två: en från $x = -1$ till $x = -\frac{1}{2}$ och en från $x = -\frac{1}{2}$ till $x = 1$. Dessa båda integraler är alltså odefinierade i varsin ändpunkt och måste betraktas som eventuella gränsvärden av integraler med samma integrand och med en gräns a som inifrån intervallet närmar sig $-\frac{1}{2}$. T ex $\int_a^1 \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{2x+1}\Big]_a^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2a+1}$ som går mot $+\infty$ då $a \to -\frac{1}{2}^+$. Även den andra delintegralen blir divergent. Den givna integralen är alltså en divergent integral.

---

7. Snittet genom kroppen på höjden z är en triangel mellan x-axeln, y-axeln och linjen $x + y = 1 - z$ (rita!). Dess area är $\frac{(1-z)^2}{2}$, och den har konstant densitet z. Massan av en sådan triangel är därmed $\frac{z(1-z)^2}{2}$ och hela kroppens massa blir då integralen $\int_0^1 \frac{z(1-z)^2}{2}\,dz = \int_0^1 \frac{z - 2z^2 + z^3}{2}\,dz = [\frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{8}]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{24}}$ kg.

---

8. a) Med $f(x) =$ integranden ovan ger trapetsformeln med tre delintervall: $I \approx \frac{h}{2}(f(0) + 2f(1) + 2f(2) + f(3)) = \frac{1}{2}(0 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 0) = \mathbf{4}$. b) Delsumma nr N är en *teleskopsumma*: $\sum_{n=1}^N (a_{n+1}^3 - a_n^3) = a_{N+1}^3 - a_1^3$ Serien är konvergent om och endast om denna delsumma har ett gränsvärde. Eftersom a_n^3 är konvergent om och endast om a_n är konvergent, så är påståendet sant!