Matematisk analys i en variabel E1 (TMV136) 070824

1. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ dx = 2tdt\end{array}\right] = \int_0^{\pi}(\sin t)2t\,dt = [\mathrm{PI}] = [-(\cos t)2t]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos t\,dt = 2\pi$

---

2. $\displaystyle\frac{\sin^2 2x - \cos^2 x + 1}{x^2} = \frac{(2x+\mathcal{O}(x^3))^2 - (1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4))^2 + 1}{x^2} = \frac{4x^2 + \mathcal{O}(x^4) - 1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4) + 1}{x^2} =$ $= 5 + \mathcal{O}(x^2) \to 5$

---

3. $y' + xy = xe^{-x^2/2}$ är 1:a ord. linjär med IF: $e^{\int x\,dx} = e^{x^2/2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y) = x \Rightarrow e^{x^2/2}y = \int \frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y)\,dx = \int x\,dx = x^2/2 + C \Rightarrow y = 1 + Ce^{-x^2/2} \Rightarrow 1 = y(0) = 0 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = e^{-x^2/2}(\frac{x^2}{2}+1)$.

---

4. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(2+x^2)} = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}[\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)]_1^{\infty} = \frac{1}{4}[\ln\frac{x^2}{x^2+2}]_1^{\infty} =$ $= \frac{1}{4}(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+2} - \ln\frac{1^2}{1^2+2}) = \frac{1}{4}(0 - \ln\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}\ln 3$.

---

5. $y'' + y = x^2$, $y = y_p + y_h$. För y_h: Kar. ekv.: $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i \Rightarrow y_h = A\cos x + B\sin x$. För y_p: Ansätt $y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p' = 2ax + b \Rightarrow y_p'' = 2a$. Alltså fås genom insättning i ekv. att $2a + ax^2 + bx + c = x^2 \Rightarrow a = 1, b = 0, c = -2$ så att $y = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2$ och $y(0) = 0 \Rightarrow A = 2$ samt $y'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$. Slutligen $y = 2\cos x + x^2 - 2$.

---

6. Vattnet på djup x lyfts x meter. Likformighet ger att $\frac{r}{1} = \frac{2-x}{2}$. Arbetet $= \int_0^2 1000gx\pi r^2\,dx = \frac{1000g\pi}{4}\int_0^2 x(2-x)^2\,dx = 250\pi g\int_0^2 x^3 - 4x^2 + 4x\,dx = 250\pi g[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}]_0^2 = 250\pi g(4 - \frac{32}{3} + 8) = 250\pi g\frac{4}{3} = \frac{1000\pi g}{3}$ (Nm).

---

7. $y' - y = g(x)$ har IF $e^{-x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}g(x) \Rightarrow e^{-x}y(x) - y(0) = \int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ och $y(0) = 1 \Rightarrow y = e^x(1 + \int_0^x e^{-t}g(t)\,dt)$. Låt $f(x) \equiv \int_0^x e^{-t}g(t)\,dt \Rightarrow |f(x)| = |\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt| \leq \int_0^x e^{-t}|g(t)|\,dt < \varepsilon\int_0^x e^{-t}\,dt = \varepsilon[-e^{-t}]_0^x = \varepsilon(1 - e^{-x}) < \varepsilon$.

---

8. b) $e^{x^{50}} = 1 + x^{50} + \dfrac{x^{100}}{2!} + \dfrac{x^{150}}{3!} + \ldots$ Koeff. framför x^{150} är 150:e derivatan/150! så vi får att svaret är $\frac{150!}{3!}$.