Matematisk analys i en variabel E1 (TMV136) 080329

1. a) $\int \cos\sqrt{x}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} & \text{och} & dx = \\ t^2 = x & & = 2tdt \end{bmatrix} = \int (\cos t)2t\,dt = \{\mathrm{PI}\} = 2(t\sin t - \int 1\sin t\,dt) =$
$2(t\sin t - (-\cos t)) + C = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} + C$ b) $\int_0^1 |\ln x|\,dx = -\int_0^1 \ln x\,dx =$
$-\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \{\mathrm{PI}\} = -\lim_{\varepsilon\searrow 0}([x\ln x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx) = -\lim_{\varepsilon\searrow 0}((0-\varepsilon\ln\varepsilon) - \int_\varepsilon^1\,dx) =$
$+\lim_{\varepsilon\searrow 0}((\varepsilon\ln\varepsilon) + (1-\varepsilon)) = 1$

---

2. Kar. ekv. $0 = r^2 + 4r + 5 = (r+2)^2 + 1 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \pm i \Rightarrow y_h = A_1 e^{(-2-i)x} + B_1 e^{(-2+i)x} = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$. För $y_p = z(x)e^{-2x}$ har vi $y_p' = (z' - 2z)e^{-2x}$, $y_p'' = e^{-2x}(z'' - 4z' + 4z)$ och insättning ger $e^{-2x} = e^{-2x}(z'' + (4-4)z' + (4-8+5)z) \Rightarrow z'' + z = 1$. Ansätt $z(x) = C \Rightarrow C = 1$. Vi får $y = y_p + y_h = e^{-2x}(1 + A\cos x + B\sin x)$ och $y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow A = -1,\ B = 0$.

---

3. $\dfrac{(1+x^2)^{1/2} - \ln(1+x^2) - \cos x}{x\sin x - x^2} =$
$\Big(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - (x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^6)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \mathcal{O}(x^6))\Big)\Big/\Big(x(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)) - x^2\Big)$
$= (-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24})x^4 + \mathcal{O}(x^6)\Big/(-\frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)) \to -\frac{8\cdot 6}{24} = -2$

---

4. Volymen $= \int_0^\infty 2\pi x e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R 2\pi x e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi\left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_0^R = \pi(1 - \lim_{R\to\infty} e^{-R^2}) = \pi$

---

5. Tangentens riktningskoeff. k tecknas på två sätt: $k = y' = \frac{y-0}{x-(-x)} = \frac{y}{2x}$ som har lösning $y(x) \equiv 0$. Om $y \neq 0$ får vi att den separabla ekv. uppfyller $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C_0$ (där $C_0 > 0$)) $= \ln(C_0\sqrt{|x|} \Rightarrow y = \pm C_0\sqrt{|x|} = C_1\sqrt{|x|},\ C_1 \neq 0$; och lösning $y \equiv 0$ fås för $C_1 = 0$. Slutligen gäller alltså $y = C\sqrt{|x|},\ C \in \mathbb{R}$.

---

6. Låt ny variabel $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t > 0 \Leftrightarrow y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}$. Pss x^2y-$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$. Alltså gäller att ekv. $\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = \sin(t) + 13t + 4$ som har kar. ekv. $0 = r^2 + 4r + 13 = (r+2)^2 + 9 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \pm 3i \Rightarrow y_h = \tilde{A}e^{-2-3i} + \tilde{B}e^{-2+3i} = e^{-2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t))$. Vidare är $y_p = y_1 + y_2$ där med $P(D) \equiv D^2 + 4D + 13$ vi har $P(D)y_1 = \sin t,\ P(D)y_2 = 13t + 4$. Ansätt $y_1 = C_1\cos t + C_2\sin t$ ger med insättning och identifikation av koefficienter att $C_1 = -1/40,\ C_2 = 3/40$. Ansätt $y_2 = at + b$ ger med insättning och identifikation av koefficienter att $a = 1,\ b = 0$. Slutligen fås $y = y_1 + y_2 + y_h = t - \frac{1}{40}\cos t + \frac{3}{40}\sin t + e^{-2t}(A\cos 3t + B\sin 3t) = \ln x + \frac{1}{40}(3\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + \frac{1}{x^2}(A\cos(3\ln x) + B\sin(3\ln x))$.

---

7. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(1 - (-1)) = \ln 2$ men $\sum\frac{1}{n}$ divergent.
