Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, TMV136

2008 12 19 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Ragnar Freij, 0762 72 18 60
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2008 läggs till skrivningspoängen.
Besked om rättningen lämnas på kursens hemsida : www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/0809/
Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Lärares närvaro i sal: ca. 9.30 och 11.30. Resultat meddelas via Ladok senast ca tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna; ringa in ditt svar för varje deluppgift, 1 - 7. Du behöver inte motivera ditt svar. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar ger -1p. Dock ej mindre än 0p totalt på uppgiften. 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är i) konvergent, ii) divergent, iii) varken konvergent eller divergent; 2) Den linjära ekvationen $y' - f(x)y = g(x)$ har integrerande faktor i) $e^{\int f(x)\,dx}$, ii) $e^{\int g(x)\,dx}$, iii) $e^{-\int f(x)\,dx}$; 3) Längden av funktionskurvan $y = \sin x$ för x mellan 0 och $\pi/2$ är i) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(\cos x)^2}\,dx$, ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,dx$, iii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(\tan x)^2}\,dx$; 4) Ekvationen $y^2y' + 1 = \cos x$ är en i) 1:a ordningens icke-linjär ODE, ii) 2:a ordningens icke-linjär ODE, iii) 1:a ordningens linjär ODE; 5) Volymen av kroppen erhållen genom rotation runt y-axeln av det plana området givet av $0 \le y \le f(x),\ 0 \le a < x < b$ är i) $2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$, ii) $\pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$, iii) $\pi \int_a^b x^2 f(x)\,dx$; 6) Integralen $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ existerar för på intervallet $[-1,1]$ i) alla udda funktioner, ii) alla begränsade funktioner, iii) alla kontinuerliga funktioner; 7) Låt för $x \in [0,1]$ funktionen f vara 0 för rationella x och 1 för irrationella x. Då gäller att integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$ i) inte existerar, ii) har värdet 0, iii) har värdet 1. (7p)

2. Beräkna i) $\displaystyle\int x\cos x^2\,dx$, ii) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx$, iii) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx$. (2+2+4p)

3. Skissa den parametriserade kurvan $c(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ där $a, b \in \mathbb{R}$ samt beräkna kurvans längd mellan punkterna $(a,0,0)$ och $(a,0,2\pi b)$. (7p)

4. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ (7p)

5. Beräkna a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^4}-1}}{x^2}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1} - (1+x)^{1/x}}{x}$ (3+4p)

6. a) Visa $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; b) Visa $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergent och $a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^\infty a_n^2$ konvergent; c) Betrakta för funktionen f med period 2π (dvs $f(x+2\pi) = f(x)$ för alla x), den s k fourierserien $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, där $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$ och $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ett mål med en fourierserie är bl a att visa att serien är konvergent för många x och dessutom att för många av dessa x så konvegerar serien verkligen till $f(x)$, dvs seriens summa är $f(x)$. Detta är i allmänhet svårt, men för f vars andraderivata existerar och är kontinuerlig så kan man visa att fourierkoefficienterna a_n och b_n avtar tillräckligt snabbt då $n \to \infty$ så att serien konvegerar för alla x. Visa detta för t ex a_n. Ledning: Partialintegrera ('åt fel håll') två gånger. (3+2+2p)

7. a) Formulera och bevisa Analysens huvudsats; b) Beräkna $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} e^{-x^2}\,dx$. (4+3p)

VA

vgv

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$