Lösningsförslag, Envariabel B1 TNIU137, 160113

1a) $\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx = [\text{PBU}] = \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\,dx = 2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$

b) $\int x\sin x\,dx = [\text{PI}] = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

c) $\int_1^e \frac{\ln x \arctan(\ln x)}{x}\,dx = \left[\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ 1 \to 0,\ e \to 1 \end{matrix}\right] = \int_0^1 t\arctan t\,dt = [\text{PI}] = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1$

$- \frac{1}{2}\int_0^1 t^2 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[t - \arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

d) $I \equiv \int e^x \sin x\,dx = [\text{PI}] = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = [\text{PI}] = e^x \sin x$

$-\left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right) = e^x(\sin x - \cos x) - I$

$\therefore$ bootstrapping: $2I = e^x(\sin x - \cos x) + C \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

2a) $y' - xy = x$ 1:a ordn. linjär. IF: $e^{\int -x\,dx} = e^{-x^2/2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}y\right) = xe^{-x^2/2} \Rightarrow e^{-x^2/2}y = \int \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}y\right)dx =$

$= \int xe^{-x^2/2}\,dx = -e^{-x^2/2} + C \quad \therefore\ y = -1 + Ce^{x^2/2}$.

b) $y' - 2xy = 0$ Vi ser att $y = 0$ är en potentiellt singulär lösn.

Om $y \neq 0$ så separabel ekv: $\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{1}{y}dy = 2x\,dx \Rightarrow$

$\int \frac{1}{y}dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^{x^2+C} =$

$= e^C e^{x^2} = ce^{x^2},\ c > 0 \Rightarrow \pm y = ce^{x^2} \Rightarrow y = Ce^{x^2},\ C \neq 0$

Vi ser att får vi $C = 0$ får vi den potentiellt singulära lösningen $y = 0$, (som alltså bara var potentiellt singulär). $\therefore\ y = Ce^{x^2},\ C \in \mathbb{R}$

c) $y' = ky$ är både lin. ordn. singulär och separabel och lösning på ngt av dessa vis ger $y = Ce^{kx}$, $C \in \mathbb{R}$ och villkoren ger $1 = y(0) = Ce^{k\cdot 0} = C$, så att $y = e^{kx}$ och $2 = y(1) = e^{k\cdot 1}$ ger $k = \ln 2$ $\therefore$ Sökt lösning $y = e^{(\ln 2)x} = 2^x$.

d) $y'' - y' = x$ 2:a ordn. linjär $y = y_p + y_h$

y_h: Kar. ekv. $0 = r^2 - r = r(r-1) \Rightarrow r_{1,2} = 0$ eller $1 \Rightarrow y_h = C_1 + C_2e^x$

Forts. Lösningsförslag TNV137 160113

2a) Forts) Ansatz $y_p = x^m(ax+b) = (m=1) = x(ax+b) = ax^2+bx$

$\therefore x = y_p'' - y_p' = 2a - (2ax+b) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1 \Rightarrow$

$y = y_p + y_h = -\frac{1}{2}x^2 - x + C_1 + C_2 e^x, \quad C_i \in \mathbb{R}$

3) i) $f(x) = x^3 = x^3 + 0 = x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ och entydighet av Maclaurin ger $P_4(x) = x^3$

ii) $x^3 = (x-1+1)^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + 0 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + \mathcal{O}((x-1)^4)$ och entydighet ger

$P_4(x,1) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$

iii) $(\cos x - 1)^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + 2\left(\frac{-x^2}{2}\right)\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^4)^2 =$

$= \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^6) + \mathcal{O}(x^8) = \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^6) \quad \therefore \lim_{x\to 0} \frac{x(\sin x - x)}{(\cos x - 1)^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x\right)}{\frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}\left(-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)\right)}{\cancel{x^4}\left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right)} = \frac{-\frac{1}{6}+0}{1+0} = -\frac{1}{6}$

4) $y'' + 2y' + 2y = x\sin x$ 2:a ordn linjär så $y = y_p + y_h$

För y_h: $0 = r^2 + 2r + 2 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y_h = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$

-"- y_p: Ansatz $y_p = x^m\left((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right) = (m=0) =$

$= (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x \Rightarrow y_p' = \ldots, \ y_p'' = \ldots$ Insättning

i ekvationen ger $x\sin x = y_p'' + 2y_p' + 2y_p = \ldots =$

$= (cx - 2ax + d + 2c - 2b - 2a)\sin x + (2cx + ax + 2a + 2d + b + 2c)\cos x$

Identifikation av koefficienter $\Rightarrow \begin{cases} 2c + a = 0 \\ 2a + 2d + b + 2c = 0 \\ c - 2a = 1 \\ d + 2c - 2b - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$a = -2/5, \ b = 14/25, \ c = 1/5, \ d = -2/25$

$\therefore y = y_p + y_h = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{14}{25}\right)\cos x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)\sin x + e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$

5) $\frac{dy}{dx} = ry(k-y) \Rightarrow$ (om $y \neq 0$, $y \neq k$ som ju är lösn.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int r\,dx = \int \frac{1}{y(k-y)}dy = \frac{1}{k}\int \frac{1}{k-y} + \frac{1}{y}dy \Rightarrow rx + C = \frac{1}{k}\left(-\ln|k-y| + \ln|y|\right)$

$= \frac{1}{k}\ln\left|\frac{y}{k-y}\right| \Rightarrow \frac{y}{k-y} = \pm e^{rkx+C} = Ce^{rkx}, \quad C \neq 0$

Lars Lösningsförslag TMV137 160113

Då även $y=0$ lösning har vi $\frac{y}{K-y} = Ce^{rKx}$, $C \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $y = \frac{KCe^{rKx}}{1+Ce^{rKx}}$ Villkor $\Rightarrow$

$10^4 = y(0) = \frac{KC}{1+C}$, $2\cdot 10^4 = y(1) = \frac{KCe^{rK}}{1+Ce^{rK}}$ och

$10^5 = \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \cancel{\frac{e^{rKx}}{e^{rKx}}} \cdot \frac{KC}{e^{-rKx}+C} = (r, K > 0)$

$= \frac{KC}{0+C} = K$

$\therefore$ $K = 10^5$, $C = 1/9$, $r = 10^{-5}\ln(\frac{9}{4})$

6) $I = \int_0^\infty \frac{e^{-x^3}}{\sqrt{x}+x^{2/3}}\,dx = \int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2$

För I_1 har vi: $I_1 \le e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^{2/3}}\,dx \le e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

då ju enligt Sats $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ konv. så Jämf. krit. för positiva integrander ger att I_1 konv.

Vi vet ju, för I_2 att exponentialfunktionen växer fortare än varje polynom, t.ex. speciellt x^2.

Alltså har vi då $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^3}} = 0$ att $\frac{x^2}{e^{x^3}} < 1$ om $x \ge x_0 > 0$ där x_0 är tillräckligt stort

$\therefore$ $I_2 = \int_1^\infty \frac{x^2}{e^{x^3}} \cdot \frac{1}{x^2(\sqrt{x}+x^{2/3})}\,dx = \int_1^{x_0} + \int_{x_0}^\infty \le \int_1^{x_0} + \int_{x_0}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

där $\int_1^{x_0} \ldots dx$ är en icke-generaliserad integral och alltså " konvergent" och $\int_{x_0}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent enl. Sats $\binom{\alpha}{2>1}$

$\therefore$ I_1 konv., I_2 konv så I konv.

Kurs lösningsförslag TMV137 160113

7) (*) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\arctan x$ är 2:a ordn. linjär så $y = y_p + y_h$. För y_h så har ekv. $0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \Rightarrow y_h = (Ax+B)e^{-x}$

För y_p ser vi ekv. som ett system av 1:a ordn.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (D+1)y_p = z \\ (D+1)z = e^{-x}\arctan x \end{cases}$$

där för $z' + z = e^{-x}\arctan x$ gäller att

$$e^x z = \int \frac{d}{dx}(e^x z)\,dx = \int e^x e^{-x}\arctan x\,dx = \int \arctan x\,dx =$$

$$= [PI] = x\arctan x - \int x\frac{1}{x^2+1}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

~~och då vi bara söker y_p, en lösning alltså, kan~~ vi ta $C=0$. $\therefore$ $y_p' + y_p = z = $ (enl. lösning ovan) $=$

$$= xe^{-x}\arctan x - \frac{1}{2}e^{-x}\ln(x^2+1) \therefore e^x y_p = \int \frac{d}{dx}(e^x y_p)dx$$

$$= \int e^x e^{-x}\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)dx = \int x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,dx$$

$= I_1 + I_2$. Vi ser att $I_1 = \int x\arctan x\,dx = [PI] =$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$= \dots = \frac{1}{2}(x^2-1)\arctan x - \frac{1}{2}x + C'$ medan är $I_2 =$

$$= -\frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)dx = [PI] = -\frac{1}{2}\left(x\ln(x^2+1) - \int x\frac{1}{x^2+1}2x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + \int \frac{x^2}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \arctan x + C''$$

$C'' = 0$

$\therefore$ $y_p = \frac{1}{2}e^{-x}\left((x^2-3)\arctan x - x\ln(x^2+1)\right)$ och

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{2}e^{-x}\left((x^2-3)\arctan x - x\ln(x^2+1)\right) + (Ax+B)e^{-x}$$

8) Superpositionsprincipen: Summan av två lösningar till homogen linjär ODE är också lösning (+ naturliga generaliseringar) Bevis: Se kursens litteratur