MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2006-12-22

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Tobias Gebäck, Henrik Seppänen 0762-72 18 60, 0762-72 18 61
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0607/
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Uppgift 1-7 ger maximalt 6 poäng, uppgift 8 upp till 8 poäng.

---

1 Beräkna $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$

2 Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 4y' + 3y = 3x + 2, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$

3 Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin 2x}$

4 Bestäm den lösning till differentialekvationen $\displaystyle y' = \frac{y^2}{1+x^2}$
som är sådan att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$.

5 Kurvan $\displaystyle y = \frac{2}{\sqrt{x(x+2)}}$, $1 \le x \le \infty$, roterar kring x-axeln.
Beräkna volymen av den obegränsade kropp som stängs in av den roterande kurvan och planet vinkelrätt mot x-axeln i $x = 1$.
Om du bara kan visa att volymen är ändlig, så ger det delpoäng.

6 Som alla känner till, börjar deltagarna i en kurs glömma vad de har lärt sig omedelbart efter det att tentan har lämnats in. Enligt *Ebbinghaus modell* gäller att hastigheten varmed det inlärda materialet glöms är proportionell mot differensen mellan det man för ögonblicket kommer ihåg och en konstant a. Låt $y(t)$ vara den andel av det totala inlärda materialet (=1) som koms ihåg vid tiden t månader efter tentan. Ett test har visat att man efter en månad minns andelen $\dfrac{1+a}{2}$ av det man hade lärt sig (här är $a < 1$). Bestäm funktionen $y(t)$ och avgör hur stor del av det man lärt sig som man aldrig glömmer.

7 (a) Funktionsfilen

```
function x=newton(x0,n)
for i=1:n
  x1=x0-(1+x0.*exp(-x0))./((1-x0).*exp(-x0));
  x0=x1;
end
```

löser i MATLAB en ekvation approximativt med Newtons metod via kommandot **newton(x0,10)**. Vilken ekvation, och ange ett exempel på startvärde $x0$ som kommer att ge en approximativ lösning?

(b) Vilket begynnelsevärdesproblem löses i MATLAB med kommandot
`[t,y]=ode45(@(t,y)2*y+2*t.*sqrt(y),[1,2],0.5)`?
Det räcker att ange ODE och begynnelsevillkor.

Var god vänd!

8 (a) Formulera en medelvärdessats för integraler (=Mean-value Theorem for Integrals).

(b) Man kan beräkna $f^{(8)}(0)$ (åttondederivatan i noll) för funktionen $f(x) = \cos x^4$ utan att derivera den 8 ggr. Berätta hur detta går till och ange den teoretiska motiveringen för detta.

(c) Vad krävs för att serien $\Sigma_{n=1}^{\infty}(f(n) - f(n+1))$ ska vara konvergent, och vilken blir i så fall dess summa?

God jul! /LF

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$
$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$
$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$