# Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2007-12-21

**1** Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-3)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

---

(a) Ansätt en partialbråksuppdelning: $\dfrac{1}{x(x-3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-3}$,

konstanterna bestäms: $A = -\dfrac{1}{3}$, $B = \dfrac{1}{3}$

Vi får $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-3)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C = \frac{1}{3}\ln|\frac{x-3}{x}| + C$

**Svar:** $\dfrac{1}{3}\ln|\dfrac{x-3}{x}| + C$

(b) Vi gör variabelsubstitutionen $u = \sin x$, $du = \cos x\ dx$:

$\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C = \arctan(\sin x) + C.$

**Svar:** $\arctan(\sin x) + C$

---

**2** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' + xy = x, \qquad y(0) = 7$$

---

En linjär ODE av 1:a ordningen - vi kan använda integrerande faktor: $e^{\int x\ dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$. Vi multiplicerar båda leden med denna och får:

$$(e^{\frac{x^2}{2}}y)' = e^{\frac{x^2}{2}}x$$
$$e^{\frac{x^2}{2}}y = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$
$$y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y(0) = 7 \Rightarrow C = 6$$

Denna ODE är också separabel, och kan därför även lösas med metoden för sådana.

**Svar:** $y = 1 + 6e^{-\frac{x^2}{2}}$

---

**3** Bestäm volymen $V$ av den kropp som bildas då det ändliga område som begränsas av x-axeln och grafen till funktionen $y = x(1-x)$ roterar

a) runt x-axeln, b) runt y-axeln

---

(a) Tvärsnittet av rotationsvolymen vinkelrätt mot $x-$axeln är en cirkelskiva med radien $x(1-x)$. Enligt skivformeln är då volymen

$$V = \int_0^1 \pi\big(x(1-x)\big)^2\,dx = \pi\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx = \pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}) = \frac{\pi}{30}.$$

**Svar:** $\dfrac{\pi}{30}$

(b) Här använder vi metoden med cylindriska skal. En smal strimma på avståndet $x$ från $y-$axeln, höjden $x(1-x)$ och tjockleken $dx$ genererar vid sin rotation volymen $2\pi x \cdot x(1-x)\cdot dx$. Addera alla sådana bidrag till en integral:

$$2\pi\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 2\pi\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 2\pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}.$$

Här kunde vi använt skivformeln och integrerat i $y-$led. Tvärsnittet blir då en cirkelring med innerradien $r = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y}$ och ytterradien $R = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y}$. Arean blir $\pi(R^2 - r^2) = \pi\sqrt{1-4y}$, som integreras från $y = 0$ till $y = \frac{1}{4}$.

**Svar:** $\dfrac{\pi}{6}$

**4** Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$$

---

Vi börjar med en partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Konstanterna bestäms till $A = -1,\quad B = \frac{1}{2},\quad C = \frac{1}{2}$, så vi får:

$$\int_2^R \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx = \Big[-\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big]_2^R = \Big[\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\Big]_2^R = \frac{1}{2}\ln\frac{R^2-1}{R^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}.$$

Nu låter vi $R \to \infty$ och får den generaliserade integralens värde:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = 0 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

**Svar:** $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

---

**5** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{x^2(1-\cos 3x)}$$

---

Vi använder följande Maclaurinutvecklingar: $e^t$ med $t = 2x$, $\ln(1+t)$ med $t = x^3$, $\cos t$ med $t = 3x$. (Se formelsamlingen!) Med resttermer i stort ordo-form får vi:

$$\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{x^2(1-\cos 3x)} = \frac{(2x+O(x^2))(x^3+O(x^6))}{x^2(\frac{(3x)^2}{2}+O(x^4)))} = \frac{2x^4+O(x^5)}{\frac{9x^4}{2}+O(x^6)} = \frac{2+O(x)}{\frac{9}{2}+O(x^2)} \to \frac{4}{9}$$

då $x \to 0$.

**Svar:** $\frac{4}{9}$

---

**6** Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

---

Vi bestämmer allmänna lösningen till motsvarande homogena ODE, hittar en partikulärlösning till den icke-homogena. Summan av dessa ger allmänna lösningen till den senare.

Vi börjar med den homogena ekvationen, vars karakteristiska ekvation är $r^2 - 4r + 4 = 0$, vilket kan skrivas $(r-2)^2 = 0$. Med dubbelroten $r = 2$ är allmänna lösninge $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

Högerledet i vår ODE är en lösning till den homogena ODE:n ($C_1 = 1,\ C_2 = 0$). Vi har alltså en resonanssituation, och för att hitta en partikulärlösning prövar vi med $y_p = ax^2e^{2x}$, som inte ingår i $y_h$. (Man kan även sätta $y_p = ze^{2x}$ och senare ta ställning till hur $z$ ska väljas). Vi deriverar 2 ggr och sätter in i ODE:n:

$$(2a + 8ax + 4ax^2) - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$

$$2ae^{2x} = e^{2x},\quad a = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{x^2}{2}e^{2x}$$

Vi adderar $y_h$ och $y_p$.

**Svar:** $y = (C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2})e^{2x}$

**7** När ett radiokativ isotop (nuklid) sönderfaller är sönderfallshastigheten proportionell mot den kvarvarande massan av nukliden. Vi har ett radioaktivt ämne I med massan $x(t)$ vid tiden $t$ och med proportionalitetskonstanten $a$. Detta ämne sönderfaller till ett ämne II med proportionalitetskonstanten $b$, och vars massa är $y(t)$. Vi antar att nukliderna har samma atomvikt (t ex $\beta-$sönderfall) och att massförändringar p g a små energiändringar försummas. Bestäm funktionen $y(t)$ om $x(0) = A,\ y(0) = B$. Betrakta bara fallet $a \neq b$ (realistiskt!), och ange dessutom villkoret för att ämne II till en början ökar sin massa.

---

Sönderfallshastigheterna motsvarar derivatorna $x'(t)$ och $y'(t)$. Vi kan därmed formulera sönderfallsmodellerna som två ODE (där vi antar att $a > 0,\ b > 0$, annars motsatt tecken):

$$x' = -ax$$

$$y' = ax - by$$

Den första har lösningen $x(t) = Ae^{-at}$ (integrerande faktor $e^{at}$), så den andra blir $y' + by = aAe^{-at}$ med lösningen

$$y(t) = \frac{aA}{b-a}e^{-at} + (B - \frac{aA}{b-a})e^{-bt}$$

(integrerande faktor $e^{bt}$, villkor $y(0) = B$). För att avgöra när ämne II kan öka i massa, deriverar vi och får $y'(0) = aA - bB$. Detta visar att ämne II ökar sin massa i början då och endast då $aA > bB$. Detta villkor kan ju också inses mera direkt!

**Svar:** $y(t) = \frac{aA}{b-a}e^{-at} + (B - \frac{aA}{b-a})e^{-bt}$**, ämne II tillväxer initialt då och endast då** $aA > bB$**.**

---

**8** a) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

är *konvergent* med *summan* $s$. Vad betyder det?

b) Bevisa att följden av termer $\{a_n\}$ i en konvergent serie har gränsvärdet 0 då $n \to \infty$.

c) Begynnelsevärdesproblemet

$$y' = \frac{y}{x+y}, \quad y(0) = 1$$

ska lösas approximativt med Eulers metod.
Ange det värde metoden ger för $y(1)$ om steglängden i $x-$led är $\frac{1}{2}$.

---

(a) Se Adams sid 480, definition 3!

(b) Se Adams sid 483, sats 4!

(c) Eulers metod: $y(a+h) \approx y(a) + hf(a, y(a))$, här med $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}, \quad h = \dfrac{1}{2}$.
Vi börjar med $a = 0, \quad y(0) = 1$: $\quad y(0,5) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$
Nu tar vi $a = 0,5 \quad y(0,5) \approx \frac{3}{2}$: $\quad y(1) \approx \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{15}{8} = 1,875$.

**Svar:** $y(1) \approx 1,875$