

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för Z1, TMV135

2008 03 29 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefon: Magnus Goffeng, 0762 72 18 60

Lärares närvaro i sal: 9.30 och 11.30

Obs! Ange utbildningsprogram och antagningsår samt namn och personnummer.

-
1. (a) Beräkna $\int \cos \sqrt{x} \, dx$ (b) Beräkna $\int_0^1 |\ln x| \, dx$ om den konvergerar. (4p+4p)
Motivera annars att den är divergent.
2. Lös differentialekvationen
 $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (6p)
3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^2) - \cos x}{x \sin x - x^2}$ (6p)
4. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq y \leq e^{-x^2}$ roterar kring y -axeln. (6p)
5. Bestäm alla kurvor i planet som har den egenskapen att tangenten i en punkt (x, y) skär x -axeln i punkten $(-x, 0)$. (6p)
6. För stora n är $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3} \approx \frac{A}{n^2}$. Ange talet A och en övre gräns för felet i approximationen. (6p)
Ledning: jämför summan med en lämplig integral!
7. Definiera vad som menas med att en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är (6p)
(a) konvergent
(b) absolutkonvergent.
(c) Ge ett exempel på en serie som är konvergent men inte absolutkonvergent.
8. (a) Använd trapetsmetoden för att approximativt beräkna $\int_1^3 f(x) \, dx$ då (6p)
 $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$.
(b) Om funktionen f i uppgift (a) har negativ andraderivata i $[1, 3]$, är då värdet som ges av trapetsmetoden för stort eller för litet?
Motivera ditt svar (rita gärna en figur)!
(c) Bestäm $g'(x)$ då $g(x) = \int_1^x \frac{e^t + \sqrt{t}}{t^2 + 1} \, dt$.

Lycka till! /LF

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Svar till uppgifterna

1. (a) $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$
(b) 1
2. $y = e^{-2x}(1 - \cos x)$
3. -2
4. π
5. Alla kurvor $x = Cy^2$ (C reell konstant).
6. $A = \frac{3}{8}$, felets belopp är $\leq \frac{1}{n^3}$.
7. Se Adams, kapitel 9!
8. (a) Trapetsformeln ger värdet 8.
(b) $f'' < 0$ innebär att kurvan $y = f(x)$ är konkav nedåt, varmed de rätta linjer som approximerar kurvan i trapetsformeln ligger *under* kurvan. Då blir värdet med trapetsformeln *för litet*.
(c) $g'(x) = \frac{e^x + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$ (enligt integralkalkylens fundamentalsats).