

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för Z1, TMV135

2008 12 18 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefon: Martin Berglund, 0762 72 18 60

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Bonuspoäng från hösten 2008 ingår.

Besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0809/

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv tentakoden på samtliga inlämnade papper.

1. (a) Beräkna $\int x^3 \sin(x^2) dx$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^\infty \frac{1}{1+e^{2x}} dx$ om den konvergerar. Motivera annars att den är divergent. (5p)

2. Funktionen $f(x)$ har följande värdetabell:

x	1	1,25	1,5	1,75	2
f(x)	6	9	7	5	4

(a) Skriv upp och beräkna en av de Riemannsummor för $\int_1^2 f(x) dx$ som man kan bilda med hjälp av denna tabell. (2p)

(b) Beräkna $\int_1^2 f(x) dx$ approximativt med trapetsmetoden (fyra delintervall). (2p)

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + y' = x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{y^2 + 1}{2\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 1$. (5p)

5. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingarna av grad 6 till funktionerna $\sin(x^2)$ och $\cos(x^3)$. Resttermer på "stort ordo"-form räcker. (4p)

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1}$. (2p)

6. Beräkna längden av kurvan $(x, y) = t^2(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2$. (6p)

7. Lös integralekvationen $y(x) = a + \int_0^x \frac{(y(t))^2}{1+t^2} dt$, där (a) $a = \frac{2}{\pi}$ (b) $a = 0$. (6p)

8. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler och definiera vad som menas med medelvärde av en funktion på ett intervall. (3p)

(b) Använd denna sats för att bevisa att $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+2} \arctan t dt = \pi$. (3p)

(c) Vad menar man med att en serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ är konvergent, och vad menas med seriens summa? (2p)

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$