

TMV135 2009-12-17 Lösningar

-
1. (a) Beräkna $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$
- (b) Beräkna $\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \cos x) \sin x}{\cos x} \, dx$
-

(a) Använd partiell integration - ta primitiv funktion till $\sin x$ och derivera i andra steget x :

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = \left[x(-\cos x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot (-\cos x) \, dx = 0 + \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = 1$$

Svar: 1

(b) Här tar vi istället variabelsubstitution:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \cos x) \sin x}{\cos x} \, dx &= \{t = \cos x, \, dt = -\sin x \, dx\} = - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1+t}{t} \right) dt = \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1}{t} + 1 \right) dt = \left[\ln t + t \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 1 - \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + \ln 2}{2} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{2 - \sqrt{2} + \ln 2}{2}$

2. (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = xy$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 2$.
- (b) Begynnelsevärdesproblemet $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ är betydligt svårare att lösa. Gör inte det, men visa hur man approximerar $y(\frac{2}{10})$ genom att använda Eulers metod med steglängd $h = \frac{1}{10}$. Du behöver inte räkna färdigt slutvärdet, ange bara det uttryck som du skulle matat in i exempelvis en miniräknare.
-

(a) Ekvationen är linjär: $y' - xy = 0$ med den integrerande faktorn $e^{\int (-x) \, dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Vi multiplicerar båda leden med denna och får

$$e^{-\frac{x^2}{2}} (y' - xy) = 0 \Leftrightarrow (e^{-\frac{x^2}{2}} y)' = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} y = C \Leftrightarrow y = C e^{\frac{x^2}{2}}$$

Slutligen ger begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ att $C = 2$.

(Ekvationen är även separabel, och då lösningen $y = 0$ inte är intressant här, kan vi skriva

$$\frac{1}{y} y' = x \text{ och lösa den enligt } \int \frac{1}{y} dy = \int x \, dx + C) \quad \textbf{Svar: } y = 2e^{\frac{x^2}{2}}$$

(b) Med $F(x, y) = x^2 + y^2$ får man, om steglängden är $h = \frac{1}{10}$, med Eulers metod:

$$y(h) \approx y(0) + hF(0, y(0)) = 1 + \frac{1}{10}(0^2 + 1^2) = 1,1$$

I nästa steg:

$$y(2h) \approx y(h) + hF(h, y(h)) \approx 1,1 + \frac{1}{10}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1,1^2\right) = 1,222$$

Svar: 1,222

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Vi bestämmer allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y'' + y = 0$ och därefter hittar vi **en** lösning y_p till den vi har. Alla lösningar till den senare kan då skrivas $y_h + y_p$.

Karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har rötterna $r = \pm i$, varmed $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Ansätt $y_p = Ax + B$, vi får då $y_p'' + y_p = Ax + B$, varför $A = 1$, $B = 0$ och $y_p = x$.

Allmänna lösningen är alltså $y = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Begynnelsevillkoren ger slutligen $C_1 = 0$, $1 + C_2 = 0$.

Svar : $y = x - \sin x$.

4. Beräkna den volym som erhålls då området i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av kurvan $y = x^2$, x -axeln och linjen $x = 2$, roterar kring y -axeln.

Om vi använder cylindriska skal ser det ut så här:

$$V = \int_0^2 2\pi x \cdot y \, dx = 2\pi \int_0^2 x^3 \, dx = 8\pi$$

Om vi istället vill använda skivformeln, får vi integrera i y -led. Integranden blir arean av en cirkelring med innerradien x och ytterradien 2:

$$V = \int_0^4 (\pi 2^2 - \pi x^2) \, dy = \pi \int_0^4 (4 - y) \, dy = 8\pi$$

Svar: 8π

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x^2} - (1 - \cos x)}{(e^{x^2} - 1) \sin^2 x}$$

Tabellen över Maclaurinutvecklingar säger (observera att $\ln \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$):

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3). \quad \text{Med } t = x^2 \text{ får vi } \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6).$$

$$e^t = 1 + t + O(t^2). \quad \text{Med } t = x^2 \text{ får vi } e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4).$$

Vi uttrycker nu vårt bråk med hjälp av dessa utvecklingar och Maclaurinutvecklingarna av $\sin x$ och $\cos x$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - (1 - \cos x)}{(e^{x^2} - 1) \sin^2 x} &= \frac{\frac{1}{2}(x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)) - (1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)))}{(1 + x^2 + O(x^4) - 1)(x + O(x^3))^2} = \\ &= \frac{-\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)}{(x^2 + O(x^4))(x^2 + O(x^4))} = \frac{-\frac{5x^4}{4} + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \frac{-\frac{5}{4} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \rightarrow -\frac{5}{24} \quad \text{då } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Svar: $-\frac{5}{24}$

6. För vilka x är

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{3^{n-1}}$$

konvergent och vad blir summan för dessa x ?

Serien kan skrivas (om vi bryter ut $\frac{2^3 x^2}{3}$):

$$\frac{8x^2}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2x}{3}\right)^{n-2} = \frac{8x^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{3}\right)^n$$

Nu ser vi att vi har en geometrisk serie med kvoten $\frac{2x}{3}$ (detta kan förstås också upptäckas genom att man skriver ut några av de första termerna), då vet vi att den konvergerar om och endast om $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2}$ med summan $\frac{1}{1 - \frac{2x}{3}}$. Vi multiplicerar slutligen in faktorn $\frac{8x^2}{3}$ och får:

$$\text{Svar: Konvergent för } |x| < \frac{3}{2} \text{ med summan } \frac{8x^2}{3 - 2x}$$

7. En rak cirkulär kon med basradie $R = 2$ och höjd $H = 2$ är fylld av två material. Från basytan till halva höjden är densiteten ρ , därifrån till spetsen är densiteten 2ρ . Hur långt från spetsen befinner sig kroppens tyngdpunkt? (Egentligen är svaret oberoende av värdet på R om $H = 2$ är givet.)

Vi lägger x -axeln längs konens symmetriaxel med spetsen i $x = 0$ och basytan i $x = 2$. Tyngdpunktens x -koordinat är nu

$$x_T = \frac{\int_0^2 x \, dm(x)}{\int_0^2 dm(x)}$$

Vi beräknar först nämnaren, som är kroppens massa. Observera att tvärsnittet vinkelrätt mot x -axeln är en cirkelskiva med radien x . Därmed är volymen av en tunn skiva med tjocklek dx lika med $dV(x) = \pi x^2 dx$ och massan är $dm(x)$ är densiteten gånger denna volym. Eftersom densiteten är olika i intervallen $[0, 1]$ och $[1, 2]$, måste vi dela upp integralen i två:

$$\int_0^2 dm(x) = \int_0^1 2\rho\pi x^2 dx + \int_1^2 \rho\pi x^2 dx = 2\rho\pi \frac{1}{3} + \rho\pi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 3\rho\pi$$

Nu tar vi täljaren på precis samma sätt (men med en extra faktor x i integranden):

$$\int_0^2 x \, dm(x) = \int_0^1 2\rho\pi x^3 dx + \int_1^2 \rho\pi x^3 dx = 2\rho\pi \frac{1}{4} + \rho\pi \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{17\rho\pi}{4}$$

$$\text{Slutligen får vi } x_T = \frac{\frac{17\rho\pi}{4}}{3\rho\pi} = \frac{17}{12}.$$

Allmännare, om man har radien R och höjden H så får man svaret $\frac{17H}{24}$, oberoende av R .

$$\text{Svar: Tyngdpunktens avstånd från spetsen av konen är } \frac{17}{12}$$

8. (a) Formulera Integralkalkylens huvudsats (med förutsättningar!).
(b) Bevisa Integralkalkylens huvudsats.
(c) Vad menas med att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är *konvergent* och vad menas med seriens *summa*?

Se läroboken, avsnitt 5.5 sats 5 och 9.2 definition 3!
