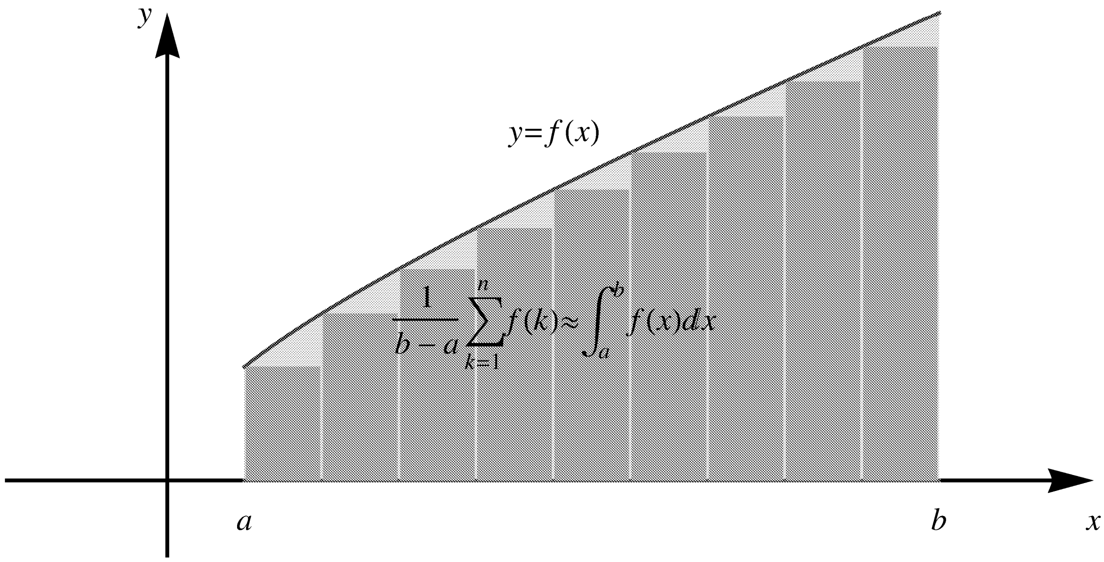
Anteckningar i Matematisk analys i en dimension, ht 2014



December 11, 2014

Innehåll

Kapitel 1

Summa

1.1 Summasymbolen med exempel

Syftet med nedanstående, är att visa (1.9) på sidan 8.

Ex. vis är

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = \{\text{betyder}\} = \underset{k=1}{1^2} + \underset{k=2}{2^2} + \underset{k=3}{3^2}.$$

$\sum$ kallas summasymbol, k kallas löpande, 1 undre och 3 övre index. k löper alltså genom *alla heltal* mellan undre index 1 och övre index 3.

1.1.1 Summasymbolen

Definition 1.1 För $m \leq n$ definieras

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{1.1}$$

menas summan av alla termer a_k, där k går genom alla heltal mellan $k = m$ och $k = n$.
m är undre index, n övre index och k löpande index.
Om $m > n$ definieras vänsterledet i (1.1) som 0.

Exempel 1.1 Ex.vis är

$$S := \sum_{k=1}^{4} \sqrt{k} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$$

och

$$T := \sum_{k=0}^{3} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3.$$

Antal termer i dessa summor är $4 - 1 + 1 = 4$ respektive $3 - 0 + 1 = 4$. Eftersom det är lika många termer i summorna, kan vi skriva termerna under samma summasymbol. Först förskjuter det löpande indexet i den första summan:

$$\sum_{k=1}^{4} \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{3} \sqrt{k+1}$$

och sedan skriver vi

$$S + T = \sum_{k=0}^{3} (\sqrt{k+1} + 2^k).$$

■

Exempel 1.2

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{4} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{4} 3\sqrt{k}\,.$$

Att kunna multiplicera in ett tal c (här $c = 3$) i summan eller alternativt bryta ut den är en av två linearitetsegenskaperna för summor. Den andra är den som illustreras i föregående exempel.

■

Teorem 1. 1 *Följande Linearitetsegenkaper gäller*

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k, \\ \sum_{k=1}^{n} c\,a_k &= c\sum_{k=1}^{n} a_k\,. \end{aligned}\right. \qquad n = 1,2,\ldots \tag{1.2}$$

Kommentarer

- En term i summan a_k kan ses som en funktion av det löpande indexet eller variabeln k. Man kan skriva $a(k)$ "a av k" istället för a_k.
- Med funktionsbegreppet och med funktionne $x^2 =: f(x)$ kan vi få följden $f(i) = i^2$, $i = 1,2,\ldots$. En följd skrivs som

$$(f(i))_{i=1}^{\infty} \text{ eller } (a_k)_{k=1}^{\infty} \tag{1.3}$$

  mer om följd senare i samband med serie.
- En summa kan då skrivas

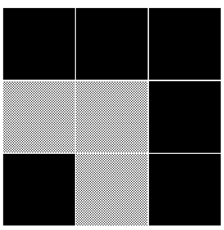
$$\sum_{j=1}^{n} f(j)\,.$$

1.1.2 Tre summor

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\,.$$

Detta kan man bevisa och/eller motivera. Vi börjar med att motivera (1.4) och därefter visar vi (1.5).

Exempel 1.3



Vi ser i figuren, att $1+3+5=3^2$, summan av de 3 första udda positiva heltalen är lika med 3^2. P.s.s. förstår man att summan av de n första udda positiva heltalen är lika med n^2.
Alla udda heltal kan skrivas $2k-1$, där k är ett heltal. Vidare är $1=2\cdot 1-1$, $3=2\cdot 2-1$ och $5=2\cdot 3-1$. Ex.vis är $11=2\cdot 6-1$ och 11 är det 6:e udda positiva heltalet. Summan

$$1+3++5+...+97+99=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)=50^2=2500\,,$$

eftersom $99=2\cdot 50-1$ är det 50 :e udda positiva heltalet. Vi får ett mer allmänt resultat, nämligen

$$1+3+5+...+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2\,,\quad n=1,2,3,... \tag{1.4}$$

■

Exempel 1.4 För att beräkna

$$S_1(n):=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+4+...+(n-1)+n\,,$$

utnyttjar vi (1.4).

$$n^2=1+3+5+...+(2n-1)=(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+...$$

$$+(2(n-1)-1)+(2n-1)=2\cdot(1+2+3+...+(n-1)+n)\underbrace{-1-1-1,,,,-1-1}_{n\text{ termer}}=$$

$$2S_1(n)-n \Longleftrightarrow n^2+n=2S_1(n)\Longleftrightarrow$$

$$S_1(n)=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1.5}$$

■

Exempel 1.5 Vi beräknar $S_1(n)$ för några olika n m.h.a. identiteten i (1.5).

n	1	2	3	4
$S_1(n)$	$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$	$1+2=\frac{2\cdot(2+1)}{2}$	$1+2+3=\frac{3\cdot(3+1)}{2}$	$1+2+3+4=\frac{4\cdot(4+1)}{2}$

■

Vi skall härleda formler för

$$1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n}k=:S_1(n)\text{ och} \tag{1.6}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=:S_2(n)\,. \tag{1.7}$$

där vi redan taget fram formel för (1.6). Vi tar fram en formel för (1.6) genom att summera två sådana summor så här.

$$
\begin{aligned}
2S_1(n) &= 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n+ \\
&+ n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1= \\
&= (n+1)n \Longleftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$S_1(n) = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,. \tag{1.8}$$

Vi visar nu (1.8) men på ytterligare ett sätt.

$$S_2(n) - S_2(n-1) = n^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(k^2-(k-1)^2\right) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) =$$

$$2S_1(n) - n \text{ som ger } S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,.$$

Vi ser att vi också har bevisat (1.4). För att få en formel för (1.7), börjar vi med att sätta $S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$ och använder den senare tekniken ovan. Vi får att

$$S_3(n) - S_3(n-1) = \sum_{k=1}^{n}\left(k^3-(k-1)^3\right) = n^3 =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1) = 3S_2(n) - 3S_1(n) + n\,.$$

Av detta följer att

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3S_1(n) - n\right) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{3}n$$

alltså att

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\,. \tag{1.9}$$

Kommentarer

- Både (1.8) och (1.9) kan faktorupppdelas.

  $$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ och } S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

- Med

  $$S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \qquad \alpha = 0,1,2,3,\ldots$$

  kan man visa att

  $$S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = c_{\alpha,\alpha+1}\,n^{\alpha+1} + c_{\alpha,\alpha}n^\alpha + c_{\alpha,\alpha-1}\,n^{\alpha-1} + \ldots + c_{\alpha,1}\,n$$

  för konstanter $c_{\alpha,j}$, , $j = 1,2,\ldots,\alpha-1,\alpha$ med $c_{\alpha+1,\alpha} = \dfrac{1}{\alpha+1}$ och $c_{\alpha,\alpha} = \dfrac{1}{2}$.
  För $\alpha = 3$ är

  $$S_\alpha(n) = S_3(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \equiv \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\,,$$

  där vi ser att $c_{4,3} = \dfrac{1}{4}$ och $c_{3,3} = \dfrac{1}{2}$.

- Speciellt ser vi att

  $$S_3(n) = [S_1(n)]^2\,.$$

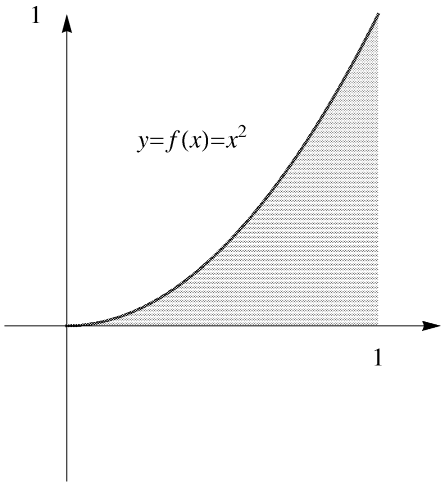
- Observera att $c_{\alpha+1,\alpha}$ och $c_{\alpha,\alpha}$ stämmer för $\alpha = 1$ och $\alpha = 2$.

Kapitel 2

Integral

2.1 Integralens definition och enkla exempel

2.1.1 Integral m.h.a. summor



$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Vi beskriver idén med funktionen $f(x) = x^2$, som integreras över intervallet $\{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$. Summan

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

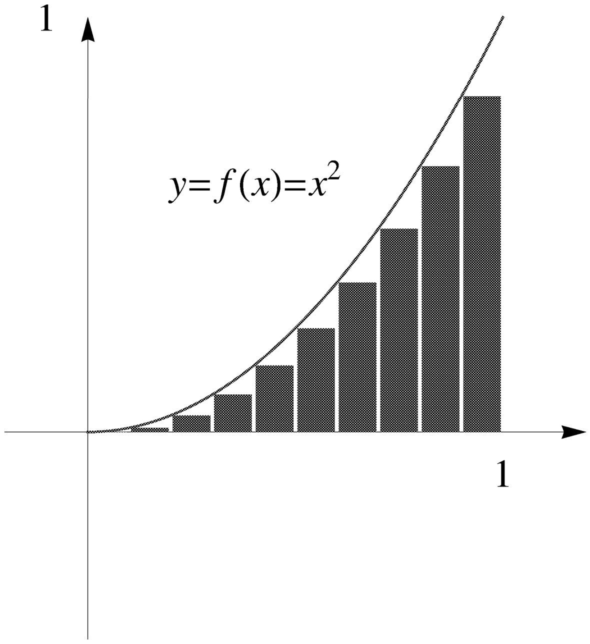
härleds på sidan 8.

Vi får alltså en undersumma till integralen som är

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} (k/n)^2 \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}\right) =$$

$$\frac{(1-1/n)^3}{3} + \frac{(1-1/n)^2}{2n} + \frac{1-1/n}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

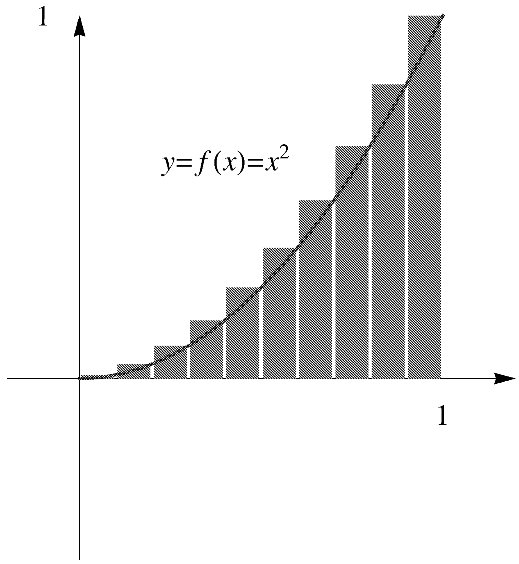


Undersumma

Vi får p.s.s. en översumma till integralen som är

$$\ddot{O}_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (k/n)^2 \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$



En översumma

Definition 2.1 Givet en begränsad funktion $f(x)$ på ett kompakt intervall $[a,b]$ och en indelning av $[a,b]$ i delintervall $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$. Låt vidare $u_k \leq f(x)$ och $ö_k \geq f(x)$ för $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ för $k = 1,2,3,\ldots,n$. Då är

$$U_n := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot u_k \text{ och } \ddot{O}_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot ö_k \tag{2.1}$$

en undersumma respektive översumma till $f(x)$ på intervalllet $[a,b]$.

Kommentarer

- Observera att $U_n \leq \ddot{O}_n$ för alla under- och översummor. Det gäller t.o.m. att $U_m \leq O_n$, $m,n = 1,2,3,\ldots.$
- Att precis ett tal, i detta fall talet $1/3$ ligger mellan alla dessa under- och översummor, säger att integralen $\int_0^1 x^2 dx$ existerar och antar värdet $1/3$.
- Även om man inte har lika långa delintervall $\Delta x = 1/n$, så kan man visa att det bara finns *ett* tal mellan *alla* under- och översummor, nämligen talet $1/3$.
- Funktionen $f(x)$ är integrerbar över intervallet $[0,1]$, i Riemanns mening.
- I $\int_a^b f(x)dx$, så kallas $\int$ för integraltecken, a undre gräns, b övre gräns, $f(x)$ integrand, x är integrationsvariabel och dx differential.

Definition 2.2 Givet en begränsad funktion $f(x)$ på de kompakta intervalllet $[a,b]$. Om det finns precis ett tal I mellan alla under- och översummor, d.v.s.

$$U \leq I \leq \ddot{O}$$

för alla undersummor U och översumor $\ddot{O}$, så säger man att $f(x)$ är integrerbar (i Riemanns mening) på intervallet $[a,b]$. Man betecknar integralen

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.2}$$

Teorem 2. 1 *Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$, så är $f(x)$ integrerbar där.*

2.1.2 Integralkalkylens medelvärdessats I

Teorem 2. 2 *Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ $(a < b)$. Då finns ett $\xi : a \leq \xi \leq b$, sådant att*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi). \tag{2.3}$$

Bevis:

$f(x)$ antar ett minsta värde och ett största värde $f_{\min}$ respektive $f_{\max}$, enligt *Satsen om minsta och största värde*,d.v.s.

$$f_{\min} \leq f(x) \leq f_{\max}.$$

Då är

$$(b-a)f_{\min} \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f_{\max}$$

eftersom VL och HL är under- respektive översumma. Genom att dividera med $b-a$ i samtliga led erhålls

$$f_{\min} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx =: y \leq f_{\max}.$$

Enligt *Satsen om mellanliggande värde*, finns $\xi \in [a,b]$ sådant att $f(\xi) = y$, d.v.s.

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Genom att multiplicera med $b-a$ i båda led följer likheten.

▬

2.1.3 Integralkalkylens huvudsats (5.5)

För en kontinuerlig funktion $f(x)$ på intervallet $[a,b]$ gäller

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{2.4}$$

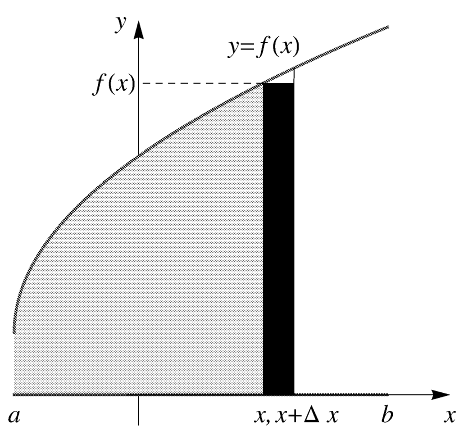
för $a \leq c \leq b$.

Teorem 2. 3 *Vi definierar*

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.5}$$

för en kontinuerlig funktion f. Då är $F_0'(x) = f(x)$.

Bevis:



Ur figuren definierar vi "areafunktionen" $\int_a^x f(t)dt =: F_0(x)$, som arean mellan $y=0$, $y=f(x)$, $x=a$ och $x=x$. Vi ser att

$$F_0(x+\Delta x)-F_0(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$$

enligt Medelvärdessatsen, så att

$$\frac{F_0(x+\Delta x)-F_0(x)}{\Delta x}=f(\xi)\,.$$

Om nu $\Delta x \to 0$, så kommer $f(\xi)\to f(x)$, p.g.a. kontinuitet. Alltså har även HL ett gränsvärde och det måste vara $F_0'(x)$ eftersom mittenledet är differenskvoten för $f(x)$, d.v.s.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F_0(x+\Delta x)-F_0(x)}{\Delta x}=F_0'(x) \tag{2.6}$$

∎

Definition 2.3 En funktion $F(x)$, sådan att $F'(x)=f(x)$ kallas primitiv funktion till $f(x)$.

Vi behöver en hjälpsats innan vi bevisar nästa sats.

Teorem 2. 4 *Om $F_1(x)$ och $F_2(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ på intervallet $[a,b]$, så är $F_1(x)=F_2(x)+C$ för någon konstant C.*

Bevis:

Bilda funktionen $G(x):=F_1(x)-F_2(x)$. Vi visar att $G(x)$ är konstant. Vi har att

$$G'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0\,.$$

Tag två olika $x-$värden, x_1 och x_2 i I. Vi visar att $G(x_1)\neq G(x_2)$ är omöjligt. Då finns, enligt medelvärdessatsen, ξ mellan x_1 och x_2, sådant att

$$G(x_1)-G(x_2)=(x_1-x_2)\,g(\xi)$$

men $g(\xi)=0$ och $x_1-x_2\neq 0$, så att $G(x_1)=G(x_2)$.

∎

Kommentarer

- I själva verket har vi ekvivalens:

  $$F_1'(x)=F_2'(x)\Longleftrightarrow F_1(x)+C=F_2(x)$$

  för någon additiv konstant C.

∎

Låt nu $F(x)$ vara en primitiv funktion till $f(x)$ i (2.5). Med konstruktionen av areafunktionen som $F_0(x)=\int_a^x f(t)dt$, ser vi att $F_0(x)$ också är en primitiv funktion till $f(x)$. Då är alltså $F(x)+C=F_0(x)$ för någon konstant C. Vi sätter $x=a$. Då är $F_0(a)=0=F(a)+C$, så att $C=-F(a)$. Därmed är $F_0(x)=F(x)-F(a)$. Sätt nu $x=b$. Då får vi $F_0(b)=F(b)-F(a)$, d.v.s.

Teorem 2. 5 *om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion i intervallet $[a,b]$ och $F(x)$ en primitiv funktion till $f(x)$, så är*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.7}$$

Kommentarer

1. Begreppen under- och översumma fungerar även om $f(x) < 0$, helt eller delvis i integrationsintervallet.
2. Om integranden $f(x) < 0$, bidrar detta med en "area" < 0. Integral är "area med tecken".
3. Ett intervall, såsom $[a,b]$ är slutet och begränsat och kallas kompakt. Man kan bevisa att en *kontinuerlig* funktion $f(x)$ är integrerbar. För detta krävs ett axiom.
4. En funktion $F(x)$, sådan att $F'(x) = f(x)$ kallas alltså *primitiv funktion* till $f(x)$. Ex.vis är $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ en primitiv funktion till $f(x) = x^2$. Även $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2$ är det. I själva verket ges alla primitiva funktioner till $f(x) = x^2$ av $\dfrac{x^3}{3} + C$, där C är en konstant.
5. (a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ kallas bestämd integral.

   (b) $\displaystyle\int f)x)\,dx$ kallas obestämd integral och betyder alla primitiva funktioner till $f(x)$.
6. Alltså är $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$, där $F(x)$ är *en* primitiv funktion till $f(x)$ och C en godtycklig konstant.

Exempel 2.1 Givet summan $S(n) := \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n + j^2/n}$. Är det en under- eller översumma till någon integrand? Vilken är i så fall integranden och $x-$gränserna? Beräkna också (i så fall) $\lim_{n\to} S(n)$.

Lösning: Summanden (d.v.s. en term) är

$$\frac{1}{n + j^2/n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (j/n)^2}$$

där vi har brutit ut $1/n = \Delta x$ och får $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Vi observerar att $j = 0,1,2,\ldots,n-1$ och med delintervall med gränser $x_j = (j)/n$ och $x_{j+1} = (j+1)/n$, $j = 0,1,2,\ldots,n-1$. I intervallet med gränser x_j och x_{j+1} är summanden $f(j/n) \geq f(x)$. Alltså är summan en översumma till integralen $Int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$. *En* primitiv funktion till $f(x)$ är $F(x) = \arctan x$. Alltså är

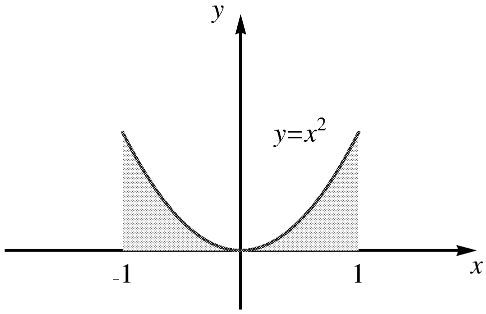
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n + j^2/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (j/n)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

■

Exempel 2.2 Beräkna integralen $\int_{-1}^{1} x^2 dx$.

Lösning: Vi utnyttjar att integranden är en jämn funktion. Med $f(x) = x^2$ kan detta uttryckas som att $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. med ex.vis med dito primitiv funktion $F(x) = \frac{x^3}{3}$ blir integralen

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \ldots = \frac{2}{3}.$$



■

I föregående exempel är integranden jämn och integrationsintervallet symmetriskt (kring origo).

Exempel 2.3 Beräkna integralen $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^5 x dx$.

Lösning: Även om vi kanske inte kan ta fram en primitiv funktion till *integranden* $\sin^5 x$, kan vi ändå beräkna integralen. Integranden är udda och integrationsintervallet symmetriskt. Att den är udda innebär att

$$g(-x) := \sin^5(-x) = (-\sin x)^5 = -\sin^5 x.$$

Då är integralen $= 0$.

■

Exempel 2.4 Beräkna integralen...

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \int_1^3 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

■

Exempel 2.5 Givet funktionen $e^{-x/2} =: f(x)$.

(a) Beräkna $\int_0^2 f(x)dx$.

(b) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x)$.

(c) Bestäm en primitiv funktion till $f(x)$.

Lösning:

(a) En primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ är $F(x) = -2 \cdot e^{-x/2}$. Detta ser man genom att derivera funktionen $F(x) = -2 \cdot e^{-x/2}$:

$$F'(x) = -2 \cdot \underbrace{e^{-x/2}}_{\text{yttre derivata}} \cdot \underbrace{(-1/2)}_{\text{inre derivata}} = \{\text{och alltså}\} = f(x).$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \left[-2 \cdot e^{-x/2}\right]_0^2 = \left[-2e^{-x/2}\right]_0^2 = -2(e^{-2/2} - e^{-0/2}) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

(b) *Alla* primitiva funktioner till $f(x)$ är

$$\int e^{-x/2}dx = -2e^{-x/2} + C \text{ där } C \text{ är en godtycklig konstant.}$$

(c) *En* primitiv funktion till $f(x)$ är ex.vis $F(x) := 2(1 - e^{-x/2})$.

■

Kommentarer

- Det gäller att kunna skilja på de tre olika frågorna i exemplet ovan.
- Vi ser att det är bra att (I) skriva om integralen och/eller integranden *innan* integrationen
- och därefter (II) ta fram en primitiv funktion och till sist
- (III) förenkla/skriva om svaret.
- Vi kan lösa (a) genom att byta plats på undre och övre gräns, *och* byta tecken på den primitiva funktionen.

  $$\int_0^2 f(x)dx = \left[-2 \cdot e^{-x/2}\right]_0^2 = 2\left[e^{-x/2}\right]_2^0 = 2(e^{-0/2} - e^{-2/2}) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right),$$
- Alternativt kan man byta tecken redan på *integranden* och därmed plats på gränserna (Jämför med förra punkten).

Exempel 2.6 Beräkna $\int \frac{dx}{x}$.

Lösning: Integranden är x^{-1}, en potensfunktion. En primitiv funktion borde vara $\frac{x^{-1+1}}{-1+1}$ men detta fungerar bara om exponenten $\neq -1$. I just detta fall är exponenten -1. En primitiv funktion är då $\ln|x|$.

Svar: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, där C är en godtycklig konstant.

■

Kommentarer

- Man kan göra följande omskrivning.

  $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln(e^C) = \ln|kx|$$

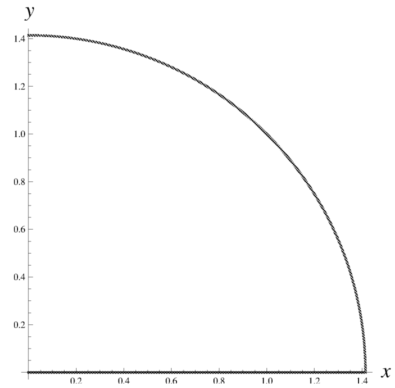
  där $k = e^C$.
- Man kan inte integrera denna funktion över en mängd, såsom $[-1, 1]$, eftersom $f(x) = \frac{1}{x}$ inte är definierad för $x = 0$ (en "singularitet").

2.1.4 Integral tolkad som area

Om det är möjligt att tolka området mellan funktionskurva och $x-$axel, med $a \leq x \leq b$, som en känd yta, såsom en del av en cirkelskiva, kan integralen beräknas rent geometriskt.

Exempel 2.7 Beräkna $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$.

Lösning: Vi har kurvan



Ytan är en kvarts cirkelskiva med radie $r = \sqrt{2}$. Arean är alltså

$$A = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi}{2} \text{ a.e.}$$

■

2.2 Primitiv funktion till olika funktionsklasser

2.2.1 Primitiv funktion till/integral av potensfunktion

Mer allmänt är

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \ln|x| + C, & n = -1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Exempel 2.8

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5x^2}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \left(\sqrt{x} + 5x^{3/2}\right) dx = \int x^{1/2} dx + 5\int x^{3/2} dx = \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{x^{5/2}}{5} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2 \cdot x^{5/2} + C = \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2}(3x+1) + C \end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant.

■

2.2.2 Integral av exponentialfunktion

Vi har redan integrerat en exponentialfunktion i exempel 2.5.

Exempel 2.9 Bestäm en primitiv funktion till (a) $f(x) := e^{kx}$, (b) $g(x) := 3 \cdot 2^x$.

Lösning: (a) Vi antar först att $k \neq 0$.

$$\int f(x)dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C \text{ så att en primtiv funktion är } F(x) = \frac{1}{k}e^{kx}.$$

För $k = 0$ är $f(x) = 1$, så att en primitiv funktion är $F(x) = x$.
(b) Vi skriver om funktionen så att basen blir e.

$$3 \cdot 2^x = 3 \cdot e^{x \ln 2}$$

där $\ln 2 = k$ som i (a), så att en primitiv funktion är $\frac{3}{\ln 2} \cdot 2^x$.

■

2.2.3 Integral av trigonometriska funktioner

Exempel 2.10

Funktion	En primitiv funktion
$\cos x$	$\sin x$
$\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$1 + \tan^2 x \equiv \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\cos^2 x \equiv \frac{1 + \cos 2x}{2}$	$\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}$

■

Exempel 2.11 Bestäm en primitiv funktion till $\cos^3 x =: h(x)$.

Lösning:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x.$$

Vi ser att $\cos x$ är derivatan till $\sin x$. En primitiv funktion ges av

$$H(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3},$$

ty när vi deriverar $H(x)$ får vi

$$H'(x) = \cos x - 3 \cdot \frac{\sin^2 x}{3} \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x.$$

Att det ta fungerar beror på att den inre derivatan är $\cos x$ och $\cos x$ finns som faktor till integranden.

■

I princip klarar man att integrera/bestämma primitiv funktion till alla udda potenser av $\sin x$ och $\cos x$ på liknande sätt. Om en jämn potens av $\sin x$ eller $\cos x$ är integrand, klarar man det med trigonometriska omskrivningar, ex.vis

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

2.2.4 Linearitetsegenskaper hos integralen

Teorem 2. 6 *Dessa egenskaper är*

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)xdx + \int g(x)dx \text{ och } \int kf(x)dx = k\int f(x)dx \tag{2.9}$$

om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga. och gäller även för bestämd integral.

Kommentarer

- Likheterna för obestämd integral tolkas som "likhet sånär som på en additiv konstant.".
- För att bevisa den första identiteten (likheten), låt $F(x)$ och $G(x)$ vara primitiva funktioner till $f(x)$ respektive $g(x)$. VL är då alla primitiva funktioner till $f(x)+g(x)$ och kan skrivas $F(x)+G(x)+C$.
  HL är $F(x)+C_1+G(x)+C_2$.
  Det är klart att VL och HL, d.v.s.
  $$F(x)+G(x)+C \text{ och } F(x)+C_1+G(x)+C_2$$
  är lika sånär som på en konstant.

2.3 Derivata och integral

Exempel 2.12 Med $f(x)=x^2$ är $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ en primitiv funktion. OM vi deriverar $F(x)$ får vi tillbaka $f(x)$. Om vi integrerar

$$F(x) := \int_a^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_a^x = \frac{x^3-a^3}{3}$$

och därefter deriverar får vi

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x t^2 dt = \frac{d}{dx}\frac{x^3-a^3}{3} = x^2 .$$

■

Exemplet ovan visar att

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{2.10}$$

Exempel 2.13

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^a f(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt = -f(x^2)\cdot 2x .$$

■

Kommentarer

- vi har alltså att
- Om deriverar först och sedan integrerar:

$$\int \frac{d}{dx} f(x)\, dx = \int f'(x) dx = f(x) + C\,. \tag{2.11}$$

2.4 Integraler forts

2.4.1 Variabelsubstitution

Exempel 2.14 Integralen

$$\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C\,.$$

Denna kompensation för den inre funktionens derivata (Här $= 3$) har vi gjort tidigare.
Man kan också "substituera", som innebär en "omskalning" med ett byte av variabel. Vi byter: $3x = t$. Då är $x = \frac{1}{3}\cdot t = x(t)$, d.v.s. vi kan se x som en funkion av variabeln t. Genom att derivera får vi

$$x'(t) \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{3}\,.$$

Vi byter konsekvent x mot t i integralen:

$$\int \sin 3x\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C\,,$$

där vi i sista ledet har bytt tillbaka till x.
För att lösa en bestämd integral, med samma integrand ex.vis

$$\int_0^{\pi/6} \sin 3x\,dx$$

kan man bara sätta in dessa "$x-$gränser" i den primitiva funktionen, alltså

$$\int_0^{\pi/6} \sin 3x\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/6} = \{\text{knep}\}\left[\frac{1}{3}\cos 3x\right]_{\pi/6}^{0} = \frac{1}{3}(\cos 0 - \cos(3\cdot\pi/6))) = \frac{1}{3}\,.$$

Man kan också byta till $t-$gränser. Variabelsubstitution förutsätter att x är en funktion av t. I stället för att derivera, så *differentierar* man. I exemplet ovan innebär det att

$$x = \frac{t}{3} \Longrightarrow dx = \frac{dt}{3}\,.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \sin 3x\,dx &= \left\{\begin{array}{lll} 3x = t & \Rightarrow & dx = dt/3 \\ & & \\ x-\text{gränser} & 0 & \pi/6 \\ t-\text{gränser} & 0 & 3\cdot\pi/6 = \pi/2 \end{array}\right\} = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \frac{1}{3}\left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(\cos 0 - \cos(\pi/2)) = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

■

Exempel 2.15

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \{\cos x = t \to dt = -\sin x\,dx\} = \\ &= \int (1-t^2)(-dt) = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C\,.\end{aligned}$$

■

Vi visar i följande exempel, att vid ett variabelbyte (subst.) räcker det med att den "gamla" variabeln (här x) är en funktion av den nya variabeln.

Exempel 2.16 Beräkna integralen $\int_1^5 x dx$ med substitutionen $x = x(t) = t^2 - 4t + 5$.

Lösning: Vi får att $dx = (2t-4)dt$. Gränsbyten: Med $x = 1$ får vi $x(t) = t^2 - 4t + 5 = 1 \Leftrightarrow t = 2$. Med $x = 5$ får vi $x(t) = t^2 - 4t + 5 = 5 \Leftrightarrow t = 0$ eller $t = 4$. Vilken av de två övre $x-$gränserna skall man ta? Duger båda? Vi beräknar motsvarande $t-$integral med de båda övre $t-$gränserna.

$$\int_1^5 x dx = \int_2^0 (t^2 - 4t + 5)(2t-4)dt = ... = 12\,,$$

men även med den övre $t-$gränsen $t = 4$ ger

$$\int_1^5 x dx = \int_2^4 (t^2 - 4t + 5)(2t-4)dt = ... = 12\,.$$

■

Exempel 2.17 Bestäm en primitiv funktion till $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lösning: Sätt $\sqrt{1-x^2} = t$. Här är t en funktion av x och inte vice versa.

$$1 - x^2 = t^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-t^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t) = -\frac{2t}{2\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow dx = -\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Insatt i $x-$integralen får vi

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cdot \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int dt = -t + C = C - \sqrt{1-x^2}\,.$$

■

Exempel 2.18 (a) Vi deriverar $\arcsin x$ och får $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) Bestäm nu en primitiv funktion till $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. Vi ser att uttryckena i (a) och (b) innanför rottecknena liknar varandra. Vi kvadratkompletterar under rottecknet.

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

så att

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \{x - 1 = t \Leftrightarrow x = t + 1 \Rightarrow dx = dt\} =$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(x-1) + C\,.$$

Svar: En primitiv funktion till $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ är $\arcsin(x-1)$.

■

Exempel 2.19 Vi deriverar nu $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$.

Lösning:

$$F'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \{\text{MGN}\} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

■

De två sista exemplen ger oss möjlighet att integrera vissa rotfunktioner.

Exempel 2.20 Vi vet att $D \arctan x = \dfrac{1}{x^2+1}$, så att

$$D \arctan(x/a) = \frac{1}{1+(x/a)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+x^2}$$

Integralen

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} = \{a = 3\} = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{3dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\left[\arctan(x/3)\right]_0^3 =$$

$$\frac{1}{3}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Denna integral kan man även lösa genom V.S.

■

Definition 2.4 Givet den bestämda integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ med $a \leq b$. En funktion $x = x(t)$ är en *variabelsubstitution*, om $x = x(t) : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ och $x'(t)$ är kontinuerlig. Om $\alpha > \beta$ beaktar man istället intervallet $[\beta, \alpha]$.

Teorem 2. 7

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt \tag{2.12}$$

Kommentarer

- Om inte $x = x(t)$ är en funktion av t på intervallet $[\alpha, \beta]$, så är inte likheten i (2.12) garanterad.
- Motsvarande likhet finns för obestämd integral och bevisas genom att derivera båda led m.a.p. t:

  $$\text{VL: } \frac{d}{dt}\int f(x)\,dx = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} = \frac{dx}{dt} \cdot f(x)$$

  och

  $$\text{HL: } \frac{d}{dt}\int f((x(t))x'(t)dt = f((x(t))x'(t) = f((x(t))\frac{dx}{dt}.$$

2.4.2 V.S. $t = \tan(x/2)$

Denna V.S. fungerar på raionella funktioner i $\cos x$ och $\sin x$. Vi får $t = \tan(x/2) \iff x = 2\arctan t + C_0$, som ger sambandet $dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$. Vi får vidare att

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ och } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{2.13}$$

Exempel 2.21

(a) Ex.vis blir

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\tan(x/2)| + C.$$

(b) I integralen nedan kan vi byta gräner

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \left\{ \begin{array}{lll} x - \text{gränser} & \pi/3 & \pi/2 \\ t - \text{gränser} & \tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3} & \tan(\pi/4) = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dt}{t} = [\ln t]_{1/\sqrt{3}}^{1} = \ln 1 - \ln(1/\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

■

2.5 Mer om integraler

2.5.1 Area mellan funktionskurvor

Exempel 2.22 Givet de två funktionerna $f(x) = 3 - x$ och $g(x) = 2/x$. Bestäm arean av ytan som begränsas av kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$.

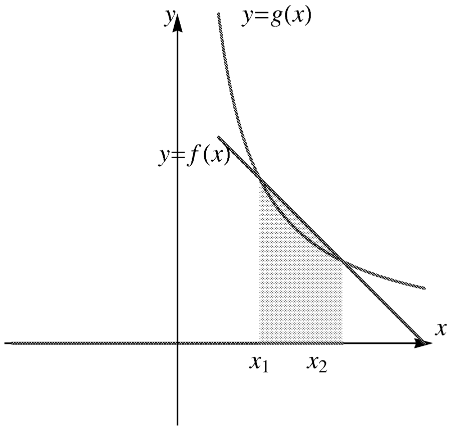
Lösning: Vi bestämmer skärningspunkternas $x-$kooordinater mellan kurvorna.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = 2$$

Arean, sånär som på tecken, ges av

$$\int_1^2 (f(x) - g(x))dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x\right]_1^2 = 3(2-1) - \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - 2(\ln 2 - \ln 1) = \frac{3}{2} - 2\ln 2\,.$$

Detta tal är > 0. Alltså är det arean mellan kurvorna.



■

Kommentarer

- Om, som i exemplet ovan, gränserna inte är givna, så är det skärningspunkternas $x-$koordinater som är integrationsgränser. Man behöver inte veta vilken funktion som är störst i intervallet. Att $Z := \int_a^b (f(x) - g(x))dx < 0$ betyder att $f(x) \leq g(x)$ för $a \leq x \leq b$. Man svarar då givetvis med $-Z$ eftersom $-Z > 0$.

- I vissa uppgifter kan $x-$gränserna vara givna, och om inte, så räknas de ut som i exemplet ovan.

- Om två funktionskurvor korsar varandra i det inre av integrationsintervallet, gäller det att veta vilken funktion, som är störst i respektive delintervall.

- Om en eller båda kurvorna ligger under $x-$axeln i integrationsintervallet, ges arean ändå av samma integral, som ovan. Detta inser aman genom att man "lyfter upp" båda kurvorna lika mycket, så att båda kurvorna hamnar ovanför $x-$axeln i integrationsintervallet. Dett gör man genom att addera en tillräckligt stor konstant C till båda funktionerna. Arean är då

$$A = \int_a^b (f(x)+C)dx - \int_a^b (g(x)+C)dx = \int_a^b (f(x)+C-(g(x)+C))dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx\,.$$

2.5.2 Partiell integration

För att integrera en produkt av funktioner används *partiell integration.* Man utnyttjar då derivata av produkt.

Exempel 2.23 Betäm en primitiv funktion till $(3x+1)e^{-x/2}$.

Lösning: Detta är en produkt av två funktioner. Vi skall utnyttja det vi vet om derivata av en produkt, nämlingen

$$D(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,.$$

Vi integrerar nu båda sidorna och får

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \Leftrightarrow \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx\,.$$

Vi får en bekvämare formel/identitet om vi sätter $u(x) = F(x)$ och $u'(x) = F'(x) = f(x)$, samt $v(x) = g(x)$. Detta ger

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx\,. \tag{2.14}$$

Kommentarer

- Termen $F(x)g(x)$ kallas "utintegrerad" term eller del.
- Samma identitet gäller för bestämd integral.
- Några råd: Antag att $p(x)$ är ett polynom.
  - För
  $$p(x)\cdot\begin{cases}\cos kx\\ \sin kx\\ e^{kx}\end{cases}, \text{ välj } p(x) = g(x)\,.$$
  - För
  $$p(x)\cdot\begin{cases}\ln(kx)\\ \arctan(kx)\end{cases}, \text{ välj } p(x) = f(x)\,.$$

I detta exempel väljer vi alltså $g(x) = 3x+1$. Vi får

$$\int(3x+1)e^{-x/2}dx = (3x+1)(-2)e^{-x/2} - \int 3(-2)e^{-x/2}dx = \ldots = -2e^{-x/2}(3x+7)+C\,,$$

så att *en* primitiv funktion är $1-2(3x+7)e^{-x/2}$.

■

Exempel 2.24 Beräkna integralen $\int_0^1 x\arctan x\,dx$.

Lösning: Vi räknar först *utan* gränser.

$$\int x\arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C\,.$$

Motsvarande bestämda integral är alltså

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\arctan x - \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\pi-2)\,.$$

■

Exempel 2.25 Beräkna $\int\sqrt{x^2+1}dx$.

Lösning:

$$\int 1\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2+1} - \int x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$x\cdot\sqrt{x^2+1} - \int\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \Longleftrightarrow$$

$$2\int\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2+1} - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C \Leftrightarrow$$

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+1} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) + C_1\,.$$

■

Exempel 2.26 * För att integrera $e^{ax}\sin bx$, med $a\neq 0$ och $b\neq 0$, kan man välja *ex.vis* $\sin bx = g(x)$. Vi får

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \int\frac{e^{ax}}{a}b\cos bx\,dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \left(\frac{e^{ax}}{a^2}b\cos bx - \int\frac{e^{ax}}{a^2}(-b^2\sin bx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2}b\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bxdx \Longleftrightarrow$$

$$= \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2}b\cos bx \Longleftrightarrow$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2}b\cos bx\right) =$$

$$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C\,.$$

■

2.6 Rationell integrand; Generaliserad integral

2.6.1 Integration av rationell funktion

Om $f(x) = \dfrac{T(x)}{N(x)}$, där $T(x)$ och $N(x)$ är polynom, så kallas $f(x)$ en rationell funktion. Ex.vis är

$$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \frac{1}{2x-1}$$

rationella. *Polynomet* $f(x) = x^2 + 1 = \frac{x^2+1}{1}$ och alltså en kvot mellan två polynom. Vi *utvecklar* en sådan funktion enligt följande schema.

- Om grad $T(x) \geq$ grad $N(x)$, så polynomdivision (pol.div.)
- Om grad $T(x) <$ grad $N(x)$, så uppdelning i partialbråk (PBU)

För att ex.vis bestämma en primitiv funktion till en rationell funktion måste den alltså utvecklas.

Exempel 2.27 En funktion såsom $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$ har högre grad på täljaren än på nämnaren. Den utvecklas med polynomdivision

$$\frac{2x^2+1}{x-1}:$$

$$\begin{array}{r}
2x+2 \\
\hline\hline
x^2+1 \quad |x-1 \\
-(2x^2-2x) \\
\hline
2x+1 \\
-(2x-2) \\
\hline
3
\end{array}$$

så att $\dfrac{2x^2+1}{x-1} = 2x+2+\dfrac{3}{x-1}$.
Varje term kan nu integreras och därmed hela funktionen. Ex.vis är

$$\int f(x)dx = \int \frac{2x^2+1}{x-1}dx = \int \left(2x+2+\frac{3}{x-1}\right)dx = x^2+2x+3\ln|x-1|+C.$$

En primitiv funktion är $x^2+2x+3\ln|x-1|$.

■

Exempel 2.28 Funktionen $g(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+3x}$ har lägre grad på täljaren än på nämnaren. Nämnaren kan dessutom faktoruppdelas som $x^2+3x = x(x+3)$. Då delar man upp funktionen $g(x)$ i partialbråk (partialbråksuppdelning, PBU). Man ansätter

$$g(x) = \frac{2x-3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \{\text{liknämnigt}\} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)}.$$

Genom att jämföra och identifiera täljarna i första ledet (VL) och sista ledet (HL) får vi

$$\begin{array}{lrcl}
 & \text{VL} & & \text{HL} \\
x: & 2 & = & A+B \\
1: & -3 & = & 3A
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{cases} A = -1 \\ \\ B = 3 \end{cases}$$

Därmed är $g(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+3x} = \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{1}{x}$. Ex.vis är

$$\int_1^2 g(x)dx = [3\ln(x+3) - \ln x]_1^2 = (3(\ln 5 - \ln 4) - (\ln 2 - \ln 1) = 3\ln 5 - 7\ln 2\,.$$

Detta tal är negativt vilket tyder på att kurvan $y = g(x)$ ligger helt eller delvis under $x-$axeln.

■

Exempel 2.29 För att dela upp $g(x) := \dfrac{2x-1}{x^2+3x+2}$ i partialbråk, som föregående exempel, ser vi att $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$. Vi ansätter alltså

$$\frac{2x-1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A+B}{x^2+3x+2}\,.$$

Detta ger ekvationerna

$$\begin{cases} x^1: & 2 = A+B \\ x^0: & -1 = 2A+B \end{cases} \iff \begin{cases} A = -3 \\ B = 5 \end{cases}$$

så att $g(x) = \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{3}{x+1}$. Nu kan man bestämma en primitiv funktion till $g(x)$.

$$\int g(x)\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+1}\right) dx = 5\ln|x+2| - 3\ln|x+1| + C\,.$$

Alltså är en primitv funktion $5\ln|x+2| - 3\ln|x+1|$.

■

Exempel 2.30

(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2(x+1)}$.

Lösning: Graden av täljaren är $0 < 3$, som är graden av nämnaren. Alltså PBU. Vi ansätter då

$$\frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

eftersom regeln är att täljaren skall vara (minst) en grad lägre än nämnaren. Nu kan man inte direkt ta fram en primitiv funktion till $\dfrac{Ax+B}{x^2}$ men varje term i HL kan lätt integreras. För att bestämma konstanterna A, B och C gör vi liknämnigt i HL och jämför täljarna i VL och HL.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \\ &= \frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2}{x^2(x+1)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

	VL		HL
x^2 :	0	$=$	$A+C$
x^1 :	3	$=$	$A+B$
x^0 :	1	$=$	B

Vi ser att $A=2$, $B=1$ och $C=-2$. Alltså är

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x+1}\right)dx = 2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{1}{x}+C.$$

En primitiv funktion är ex.vis $F(x)=2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{1}{x}$.

(b) Bestäm alla primitiva funktioner till $g(x)=\frac{3x+1}{x(x+1)^2}$.

Lösning: Med en liknande ansättning får vi

$$g(x)=\frac{3x+1}{x(x+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x}$$

Men vi kan inte lika lätt dela upp termen $\frac{Ax+B}{(x+1)^2}$ i två termer som lätt kan integreras. I stället för vi följande omskrivning.

$$\frac{Ax+B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B-A}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B-A}{(x+1)^2}$$

där varje term lätt kan integreras. Detta visar att ansättningen vid PBU kan se ut så här (med $B-A$ bytt mot B).

$$g(x)=\frac{3x+1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x}.$$

Liknämnigt och sedan genom att sätta täljarna lika får vi

	VL:s		HL:s täljares koefficienter	
x^2 :	0	=	$A+C$	$\Leftrightarrow A=-1, B=2, C=1$
x^1 :	3	=	$A+B+2C$	
x^0 :	1	=	C	

Alltså är

$$\int g(x)dx = \frac{3x+1}{x(x+1)^2} = \ln x - \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}+C = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{2}{x+1}+C.$$

■

För $f(x)=\frac{T(x)}{N(x)}$ med $N(x)=\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{n_j}$, alla a_j olika och $n_j\in\mathbb{Z}_+$ och grad $T<$ grad N. Ansättningen vid PBU ser då ut så här:

$$f(x)=\sum_{a_j}\sum_{k_j=1}^{n_j}\frac{A_{j,k}}{(x-a_j)^{k_j}} \tag{2.15}$$

Exempel 2.31 För att finna en primitiv funktion till $\frac{2x+1}{x^2+2x+4}$ ser vi att vi kan få en logaritmisk och en arctan-term

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2+3}=\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+3}-\frac{1}{(x+1)^2+3}.$$

Integralen av den första termen är $\ln((x+1)^2+3)+C_1$. Integralen av den andra termen:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C_2$$

Svar: En primitiv funktion är

$$\ln\left(x^2+2x+4\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

■

Exempel 2.32 Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$.

Lösning: Integranden går att dela upp i partialbråk så här

$$\frac{x+1}{x^2+4} = \frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+4}.$$

Om vi deriverar $F_1(x) := \ln(x^2+4)$ får vi $F_1'(x) = \dfrac{1}{x^2+4}\cdot 2x$. Detta hjälper oss att integrera den första termen. För den andra termen skriver vi

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x/2)^2+1} = \frac{1}{4}\cdot 2\arctan(x/2)+C.$$

$$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+4}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\cdot\arctan(x/2)\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{8}(\pi+\ln 16)$$

■

2.6.2 Generaliserad integral

Om integrationsintervallet inte är kompakt (slutet och begränsat) eller om integranden inte är begränsad i integrationsintervallet, kallar man integralen *generaliserad*. Betrakta $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ med $a<b$. Vi koncentrerar oss på två fall.

I $a=-\infty$ eller $b=\infty$, d.v.s. obegränsat integrationsintervall.

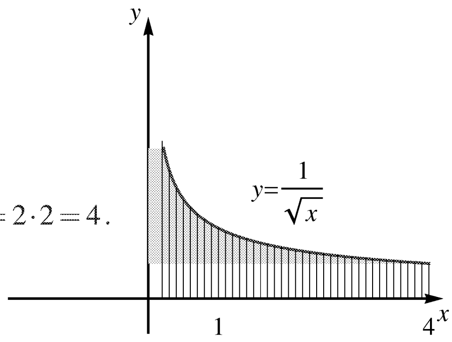
II $f(x)\to\pm\infty$, då $x\to a_+$ eller $x\to b_-$.

Exempel 2.33 Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Lösning:
Vi vet att $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$, då $x \to 0_+$, d.v.s. integranden är obegränsad i integrationsintervallet $[0,4]$. Vi löser likväl integralen med primitiv funktion.

$$F(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} \text{ så att } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^4 = 2\cdot 2 = 4.$$

Att integralen existerar som reellt tal innebär att integralen är *konvergent*.



■

Exempel 2.34 Beräkna integralen

$$\int_0^\infty (3x+1)e^{-x/2}dx.$$

Lösning: Man säger att denna integral "är generaliserad i oändligheten". Vi beräknade en primitiv funktion i exempel 2.23. Vi beräknar integralen över ett intervall $[0,b]$ och låter sedan $b \to \infty$.

$$\int_0^b (3x+1)e^{-x/2}dx = \left[-2e^{-x/2}(3x+7)\right]_0^b = 14 - 2(3b+7)e^{-b/2}.$$

Nu låter vi $b \longrightarrow \infty$. Vi vet att exponentialfunktionen "vinner" över potensfunktionen $2(3b+7)$, d.v.s. $2(3b+7)e^{-b/2} \longrightarrow 0$. Alltså är integralens värde $14-0=14$ (och därmed konvergent).

■

Exempel 2.35 Vi beräknar integralen $\int_0^1 \ln x\, dx$.

Lösning:

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \{\text{P.I.}\} = [x\ln x]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx = [x\ln x - x]_0^1 = 1\ln 1 - 1 - (0\ln 0 - 0),$$

men vad är $0\ln 0$? Svar: Detta uttryck är inte definierat. I stället skall vi beräkna integralen, för $a > 0$,

$$\int_a^1 \ln x\, dx = \{\text{P.I.}\} = [x\ln x]_a^1 - \int_a^1 x\cdot\frac{1}{x}dx = [x\ln x - x]_a^1 = 1\ln 1 - 1 - (a\ln a - a)$$

och sedan beräkna $\lim_{a\to 0_+} a\ln a - a = 0 - 0 = 0$, ett känt gränsvärde. Svar den generaliserade integralen är -1.

■

Exempel 2.36 Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^\infty g(x)dx$, där $g(x)$ är given i exempel 2.30.

Lösning: Vi integrerar då över intervalltet $[1,b] = \{x : 1 \leq x \leq b\}$ och låter sedan $b \to \infty$.

$$\int_1^b g(x)dx = -\ln(b+1) + \ln 2 + \frac{2}{1+1} - \frac{2}{b+1} + \ln b - \ln 1\,.$$

Vi sammanför termer av liknande typ innehållande b.

$$\begin{aligned}\int_1^b g(x)dx &= 1 + \ln 2 - \frac{2}{b+1} + \ln\left(\frac{b}{b+1}\cdot\frac{1/b}{1/b}\right) = \\ &= 1 + \ln 2 - \frac{2}{b+1} + \ln\left(\frac{1}{1+1/b}\right) \to 1 + \ln 2,\ \text{då } b \to \infty\,.\end{aligned}$$

Svar: Den generaliserade integralen är konvergent med värdet $1 + \ln 2$.

■

Exempel 2.37 Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\cosh x}\,.$$

Lösning: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, så att integralen kan skrivas

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}} &= \{\text{symmetri}\} = \int_0^{\infty} \frac{4dx}{e^x + e^{-x}} = \\ &= \int \frac{4e^x dx}{e^{2x}+1} = 4\lim_{b\to\infty}\,[\arctan(e^x)]_0^b = 4\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi\,.\end{aligned}$$

■

Exempel 2.38 Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4dx}{x^4+4}\,.$$

Lösning: Integrationsintervallet är $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ och integralen betyder alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4dx}{x^4+4}\,.$$

Integranden är en positiv rationell funktion. grad nämnare $= 4 >$ grad täljare $= 0$ och $4 - 0 > 1$, så att integralen är konvergent. Dessutom skall integranden utvecklas med PBU. Först en faktoruppdelning av nämnaren, här m.h.a. kvadratkomplettering.

$$x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2\cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 - (2x)^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)\,.$$

Vi kan utnyttja att integranden är jämn ch integrationsintervallet symmetriskt och får

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\,dx}{x^4+4} = \int_0^{\infty} \frac{8\,dx}{x^4+4}\,.$$

Alltså ansätter vi

$$\begin{aligned}\frac{8}{x^4+4} &= \frac{A\cdot(2x+2)+B}{x^2+2x+2}+\frac{C\cdot(2x-2)x+D}{x^2-2x+2}= \\ &= \frac{2Ax^3-2Ax^2+4A+Bx^2-2Bx+2B+2Cx^3+2Cx^2-4C+Dx^2+2Dx+2D}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}\end{aligned}$$

Vi identifierar nu koefficienterna i respektive leds täljare.

$$\begin{array}{lcll} x^3: & 0 & = & 2A+2C \\ x^2: & 0 & = & -2A+B+2C+D \\ x^1: & 0 & = & -2B+2D \\ x^0: & 8 & = & 4A+2B-4C+2D \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lcll} x^3: & -A & = & C \\ x^2: & 4A & = & B+D=2B \\ x^1: & B & = & D \\ x^0: & 8 & = & 8A+4B=16A \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} B & = & D=1 \\ A & = & -C=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Integralen är alltså

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{8\,dx}{x^4+4} &= \left[\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\right)+\arctan(x+1)+\arctan(x-1)\right]_0^\infty = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right)+\arctan(x+1)+\arctan(x-1)\right]_0^b = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2/b+2/b^2}{1-2/b+2/b^2}\right)+\arctan(b+1)+\arctan(b-1)\right]- \\ &- \ln\left(\frac{0^2+2\cdot 0+2}{0^2-2\cdot 0+2}\right)-\arctan(0+1)-\arctan(0-1)= \\ &= \frac{1}{2}\ln 1+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln 1-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi.\end{aligned}$$

■

Kommentarer

- Man kan genom att utnyttja resultatet i föregående exempel, lätt beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$.

Exempel 2.39 Betrakta den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

(a) På vilka sätt är integralen generaliserad?

(b) Beräkna integralen.

Lösning: Sätt integranden till $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$.

(a) Integralen är generaliserad dels genom att övre gräns är ∞ och dels för undre gräns $x=0$ gäller att $f(x)\to\infty$, då $x\to 0_+$.

(b) Vi neräknar nu integralen och försöker oss på V.S

$$t=\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow \ln(t^2+1)=x\Rightarrow \frac{2t\,dt}{t^2+1}=dx$$

med gränser

$$
\begin{array}{lll}
x-\text{gränser} & 0 & \infty \\
t-\text{gränser} & 0 & \infty
\end{array}
$$

Integralen kan alltså skrivas

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \frac{2t\,dt}{t^2+1} = 2[\arctan t]_0^\infty = \pi .$$

■

Exempel 2.40 Betrakta integralen

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^\alpha + 1}} .$$

(a) För vilka reells α är integralen konvergent?

(b) Beräkna integralen för dessa α.

Lösning:

(a) Vi kan jämföra integranden på följande sätt.

$$\frac{1}{x\sqrt{x^\alpha+1}} \leq \frac{1}{x^{1+\alpha/2}}$$

och integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\alpha/2}}\,dx$$

är konvergent omm $\alpha > 0$. Således är integralen konvergent, om $\alpha > 0$, enligt Jämförelsekriteriet. För $\alpha = 0$ får vi integranden

$$\frac{1}{x \cdot \sqrt{2}}$$

som ger en divergent integral. För $\alpha \leq 0$ är alltså integralen divergent, återigen enligt Jämförelsekriteriet.

(b) Vi beräkna nu integralen för $\alpha > 0$. Sätt $t = \sqrt{x^\alpha + 1}$. Detta ger

$$x = (t^2-1)^{1/\alpha} \Rightarrow dx = \frac{1}{\alpha}(t^2-1)^{1/\alpha - 1} \cdot 2t\,dt$$

och gränserna blir

$$
\begin{array}{lll}
x-\text{gränser} & 1 & \infty \\
t-\text{gränser} & \sqrt{2} & \infty
\end{array}
$$

Integralen blir alltså

$$\frac{1}{\alpha}\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{(t^2-1)^{1/\alpha}\cdot t} \cdot (t^2-1)^{1/\alpha-1} \cdot 2t\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2\,dt}{t^2-1} = \frac{1}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^\infty =$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1-1/b}{1+1/b}\right) - \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{2}{\alpha}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

■

Exempel 2.41 Följande integral $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} =: I$ är icke-elementär. Det betyder att en primitiv funktion inte kan uttryckas i elementära funktioner. Man kan ändå visa att

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Vad är $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} =: J$?

Lösning: Vi skriver om integranden utom faktorn x, m.h.a. PBU på följande sätt.

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{\left(e^{x/2}\right)^2-1} = \frac{A}{e^{x/2}-1} + \frac{B}{e^{x/2}+1}.$$

Genomt aqtt föra liknämnigt och sedan sätta täljarna lika får vi

$$\begin{aligned} e^{x/2}: \quad 0 &= A+B \\ 1: \quad 1 &= A-B \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 1/2 \\ B &= -1/2 \end{cases}$$

Alltså är

$$I = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{x/2}-1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{x/2}+1}.$$

I de två sista integralerna gör vi V.S. $x/2 = t \Leftrightarrow dx = 2dt$, som ger att

$$I = \int_0^\infty \frac{2t\,dt}{e^t-1} - \int_0^\infty \frac{2t\,dt}{e^t+1} = 2I - 2J \Leftrightarrow 2J = I.$$

Alltså är

$$\frac{1}{2}I = J = \int_0^\infty \frac{xdx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}.$$

■

Exempel 2.42 Vi visar nu, i en integral, som övergår i en generaliserad integral, vikten av att den nya variabeln är en funktion av den gamla (Se exempel 2.16 sidan 22).
Beräkna integralen

$$\int_0^{4\pi} \frac{dx}{2+\sin x}.$$

Vi vet att V.S. $t = \tan(x/2)$ gör att integranden blir en rationell funktion i t, av inte allt för hög grad. Men med denna V.S. får vi inte att $x = x(t)$. Vi ser att $t-$gränserna blir $t = \alpha = 0$ och $t = \beta = 0$. Detta är orimligt eftersom integranden > 0. Vi kan skriva integralen som

$$\int_0^{4\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = 2\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$$

eftersom integranden har perioden 2π. Vi vet att för $t = \tan(x/2)$ är $x = x(t) = 2\arctan t$, (Se (2.13) sidan 24) alltså att x är en funktion av t för $-\infty < t < \infty$ med intervallet $-\pi < x < \pi$. Återigen gör periodiciteteten för $\sin x$ att vi kan förskjuta integrationsinvervallet från $(0, 2\pi)$ till $(-\pi, \pi)$. Integralen kan alltså skrivas

$$\int_0^{4\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = 2\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = \{t = \tan(x/2)\} =$$

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+\dfrac{2t}{t^2+1}} \frac{2dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \{\text{K.K.}\} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4} = 2\cdot\frac{4}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(2t/\sqrt{3}+1/\sqrt{3})^2+1} =$$

$$= \left[\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan((2t/\sqrt{3}+1/\sqrt{3})\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

■

2.6.3 Generaliserad integral forts

Exempel 2.43 Vi beräknar nu integralen $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ för olika α. För $\alpha = 1$ fårvi en primitiv funktion $\ln x$, så att då integralen divergent. För $a > 0$ är

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^1 x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-a^{1-\alpha}\right).$$

Omm $1-\alpha > 0$, d.v.s. omm $\alpha < 1$ är existerar gränsvärdet

$$\lim_{a\to 0_+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1-a^{1-\alpha}\right) = \dots = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Precis för dessa α är integralen alltså konvergent. För integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, ser vi att vi får divergens om $\alpha = 1$. Vi beräknar sedan

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{b^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Detta uttryck har ett (ändligt) gränsvärde, omm $\alpha > 1$.

■

Vi kan sammanfatta exemplet ovan med att

$$\begin{aligned} &(i) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent } \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ &(ii) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är konvergent } \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ett bra sätt att avgöra om en integral $\int_a^b f(x)dx$ med $a < b$ är konvergent eller divergent är att beräkna integralen och på så sätt se vad man får när man låter den $x = b \to$"generaliserade" gränsen.

Exempel 2.44 Är integralen $\int_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ konvergent eller divergent?

Lösning: Vi kan substituera i denna integral, ex.vis $x = t^2$ för $t \geq 0$. Då är $dx = 2tdt$ och $\sqrt{x} = t$. Gränserna är $t = 0$ och $t = 2$.

$$\int_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{t^2+t} = 2\int_0^2 \frac{dt}{t+1} = [2\ln(t+1)]_0^2 = 2(\ln 3 - \ln 1) = 2\ln 3\,,$$

och alltså konvergent.

■

Exempel 2.45 Är följande integral konvergent? $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Lösning: Vi har att $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ existerar, eftersom integranden är kontinuerlig i det kompakta integrationsintervallet $[0,1]$. För $[1,\infty)$ gäller att

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3+0}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

och integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ är konvergent (med $\alpha = 3/2 > 1$ i (ii).) Alltså är den givna integralen konvergent.

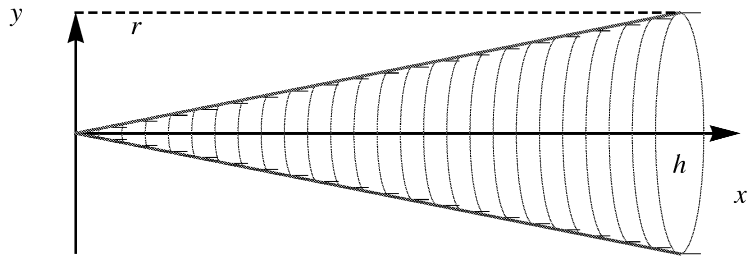
■

I det sista exemplet jämför vi med integranden $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \geq 0$ med $\dfrac{1}{x^{3/2}}$, som är större och vars generaliserade integral är konvergent. Då är också den ursprungliga integralen konvergent, enligt jämförelsekriteriet.

2.7 Volymberäkning

2.7.1 Volym av vissa kroppar

Exempel 2.46 (**Skivmetoden**) Vi skall beräkna volymen av en rak cirkulär kon med radie r och höjd h. Vi låter ytan som begränsas av $y = f(x) = kx$, $y = 0$ ($x-$axeln), samt $x = 0$ och $x = h$ rotera kring $x-$axeln. Detta genererar en rotation-skropp.
Dess volym fås om man "skivar"kroppen i, säg n tunna skivor med tjocklek $\Delta x = \dfrac{h-0}{n}$ i punkterna $x = i\Delta x$ med med radie $y = k(i\Delta x)$ för $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Vidare är linjens riktningskoefficient $k = \dfrac{r}{h}$.



Vi får då en undersumma (och p.s.s. en översumma) och till stlut låta $n \to \infty$, och därmed få volymen av konen. Istället skall vi mur resonera med *infinitesimala*, dV och dx, d.v.s. volymen dV av en oändligt liten cylinderskiva med oändligt liten tjocklek dx. Man hoppar därmed över steget med under- och översumma och får direkt en integral för volymen, här betecknad V. En sådan cylinderskiva har volymen $dV := \pi y^2 dx$. Konens volym är integralen ("summan" av alla dV)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{x=0}^{h} dV = \int_0^h \pi y^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot x^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \\
&= \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}.
\end{aligned}
$$

■

2.8 Volym och Areaberäkning

2.8.1 Volym, skalmetoden

Exempel 2.47 Man kan dela in konen i koncentriska cylindriska skal parallela med $x-$axeln.

Ett sådan skal har den infinitesimala arean $dy\,(h-x)2\pi y$, där $y = kx = \frac{r}{h}x$. Vi skall alltså integrera m.a.p. y, där $0 \leq y \leq r$. Integralen blir

$$2\pi \int_0^r y\left(h - \frac{h}{r}y\right) dy = 2\pi \frac{h}{t} \int_0^r \left(ry - y^2\right) = \frac{1}{3}\pi h r^2\,,$$

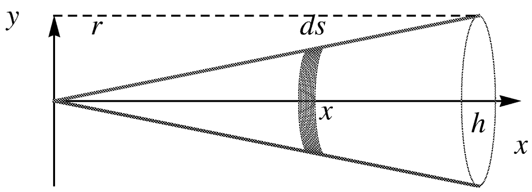
d.v.s. samma resultat som i exempel 29.

■

2.8.2 Area av yta

Vi tar återigen konen som exempel.

Exempel 2.48



Ett infinitesimalt ytelement är har den infinitesimala arean $2\pi y ds$, där $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.
Vi får att konens *mantelyta* är

$$A = \int_{x=0}^h 2\pi y ds = \int_{x=0}^h 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_0^h \frac{rx}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{r}{h}\int_0^h x dx = 2\pi \cdot \frac{r}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}\,.$$

■

2.8.3 Kurva och kurvlängd

Exempel 2.49 Beräkna längden av kurvan γ: $x \mapsto (x, \ln x)$, där $1 \leq x \leq e$.

Lösning: Kurvans längd är

$$
\begin{aligned}
L &= |\gamma| = \int_{x=1}^{e} ds = \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{1+(1/x)^2}dx = \\
&= \int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = t \\ x = \sqrt{t^2-1} \\ dx = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} \\ x = 1, t = \sqrt{2} =: a x = e, t = \sqrt{e^2+1} =: b \end{array} \right\} = \int_a^b \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \\
&= \{\text{pol.div}\} = \int_a^b \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt = \int_a^b \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = \{\text{PBU}\} = \\
&= \int_a^b \left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]\right)dt = \left[t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_a^b = \\
&= (b-a)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \\
&= \sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right) = \{\text{Visa:}\} \\
&= \sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{e^2+1}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)-1 = 2.00...
\end{aligned}
$$

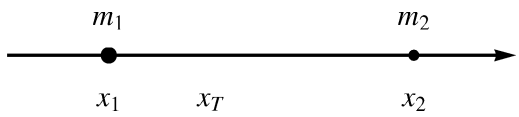
■

2.9 Tyngdpunkt, tröghetsmoment m.m.

2.9.1 Tyngdpunkt

Exempel 2.50 Givet två punktmassor m_1 och m_2 utplacerade på en $x-$axel med koordinater x_1 respektive x_2. Bestäm tyndgpunktens $x-$koordinat x_T.

Lösning:



Tyngdpunktens koordinat uppfyller

$$(x_T - x_1)m_1 = (x_2 - x_T)m_2$$

elller ekvivalent

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = x_T\,,$$

alltså ett viktat medelvärde av x_1 och x_2. Om man p.s.s. sätt har en massa m uppdelad i n delmassor Δm_i, d.v.s. $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$, i koordinaterna x_i, $i = 1, 1, 2 \ldots, n$ blir tyngdpunktens koordinat

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{m}\,.$$

För en massa som är "kontinuerligt" utbreddd längts $x-$axeln är tyngdpunktens $x-$koordinat (Obs! Summasymbolen ersätts av ett integraltecken och Δm_i av dm etc.)

$$x_T = \frac{1}{m}\int x\,dm\,.$$

■

Exempel 2.51 Bestäm koordinaterna för tyngdpunkten för konen med konstant densitet ρ given i exempel 29.

Lösning: Tyngdpunktens $y-$koordinat är 0, av symmetriskäl. Dess massa är $m = \rho V$, där volymen $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$. Vi skall se volymen som en funktion av x. $V(x) = \dfrac{\pi y^2 x}{3}$, där $V(h) = V$, d.v.s. volymen av (del-)konen där höjden är x och $0 \leq x \leq h$. Eftersom $y = \dfrac{r}{h}x$, så är

$$V(x) = \left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{\pi x^3}{3} \text{ och } m(x) = \rho \cdot V(x)\,.$$

Vi låter K representera kroppens, d.v.s. hela konens koordinater. Vi skall lösa integralen $\int_K x\,dm$. Vi byter variabel från m till x.

$$dm = \rho\left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot x^2 dx\,.$$

Vi skall alltså lösa integralen

$$\int_K x\,dm = \int_0^h \rho\pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \int x^3 dx = \rho\pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{h^4}{4} = \frac{\rho\pi r^2 h^2}{4}.$$

Men detta är täljaren! Tyngdpunktens $x-$koordinat är

$$x_T = \frac{1}{m} \cdot \frac{\rho\pi r^2 h^2}{4} = \frac{3}{\rho\pi r^2 h} \cdot \frac{\rho\pi r^2 h^2}{4} = \frac{3}{4} h.$$

Tyngdpukten är alltså $1/4$ från konens bas.

■

Exempel 2.52 För en roterande kropp finns en rotationsaxel. Dess *vinkelhastighet* (eller vinkelfrekvens) ω definieras som vinkel per tidsenhet. Jorden roterar kring sin polaxel med ett varv, d.v.s. 2π på tiden $t = 24$ h. Alltså är

$$\omega = \frac{2\pi}{24\text{ h}} = \frac{\pi}{12}\text{ rad/h} = \frac{\pi}{43200}\text{ rad/s}.$$

Vi kan formellt definiera

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{2.17}$$

där t är tid och θ är vinkeln i radianer.
Göteborg ligger ungefär på breddgraden $\alpha = 57°$. Avståndet till polaxeln är då jordens radie $r = 6400$ km gånger cosinus för vinkeln. Alltså $r\cos\alpha$. Hastigheten $v$på denna breddgrad på jordytan är då

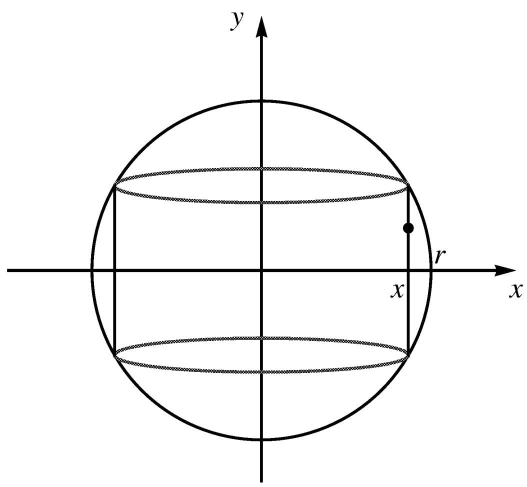
$$v = \omega r \cos\alpha = \frac{\pi}{12} \cdot 6.4 \cdot 10^3 \cdot \cos 57° \approx 913\text{ km/h}.$$

■

Exempel 2.53 Rörelseenergin för *translationsrörelse* är

$$W_{k,t} = \frac{mv^2}{2} \tag{2.18}$$

där m är kroppens massa och v dess hastighet. Vi skall beräkna rörelseenergin $W_k = W_{k,r}$ för ett homogent klot med radie r, som roterar kring en axel ($y-$axeln) genom dess medelpunkt. Vi antar att dess vinkelhastighet är ω. Sambandet mellan en punkts hastighet v och vinkelhastigheten är $v = \omega x$, där x är punktens (vinkelräta) avstånd till medelpunkten (rotationsaxeln).



Vi tänker oss $y-$axeln som rotationsaxel med (konstant) vinkelhastighet ω. Punkter på cylindern med avstånd x från rotationsaxeln ($y-$axeln) roterar med hastigheten $\omega x = v$. Volymen av cylinderskalet med radie x, tjocklek dx och höjd $y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ är då

$$dV = \underbrace{2\sqrt{r^2-x^2}}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{2\pi x}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{tjocklek}} .$$

Motsvarande infinitesimala rörelseenergi är därmed

$$dW_k = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho\, dV\, (\omega x)^2 = \frac{1}{2} \rho\, x dx \sqrt{r^2 - x^2}\, \omega^2 x^2 .$$

Den totala rörelseenergin är då

$$\begin{aligned} W_k &= \int_K dW_k = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{r} \rho \cdot 2\pi \cdot x \cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\omega^2 x^2 dx = \\ &= 2\pi\omega^2 \rho \int_0^r x^3 \sqrt{r^2-x^2}\, dx . \end{aligned}$$

Vi beräknar integralen.

$$\int_0^r x^3 \sqrt{r^2-x^2}\, dx = \int_0^r \left(x\sqrt{r^2-x^2}(x^2-r^2) + r^2 x \sqrt{r^2-x^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^r r^2 x \sqrt{r^2-x^2} dx - \int_0^r r^2 x (r^2-x^2)^{3/2} dx =$$

$$= \left[\frac{r^2}{3} \left(r^2 - x^2\right)^{3/2} - \frac{r^2}{5} \left(r^2-x^2\right)^{5/2} \right]_r^0 = \frac{r^5}{3} - \frac{r^5}{5} = \frac{2r^5}{15} .$$

Därmed är

$$W_{k,r} = 2\pi\omega^2\rho \cdot \frac{2r^5}{15} = \{V_{\text{klot}} = \frac{4\pi r^3}{3}\} = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{r^2}{5} \omega^2 = m \cdot \frac{r^2}{5} \omega^2 .$$

Detta skriver man om så att det liknar rörelseenergi för translationsrörelse, givet i (2.18).

$$W_{k,r} = \frac{1}{2} \frac{2mr^2}{5} \omega^2 =: \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Uttrycket $I := \dfrac{2mr^2}{5}$ kallas kroppens (klotets) *tröghetsmoment*[1] m.a.p. en axel ($y-$axeln) genom klotets medelpunkt.

■

Exempel 2.54 Hur mycket rörelseenergi $W_{k,r}$ har jorden? Antag att jorden har konstant densitet.

Lösning:

- Jordens massa $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg.
- Vinkelhastgiheten är $\omega = \dfrac{2\pi}{24 \cdot 3600}/\text{s}$.
- Radien är $r = 6.4 \cdot 10^6$ m.

[1] Moment of intertia, I

- Tröghetsmomentet är $I = \dfrac{2mr^2}{5}$.
- Alltså är rörelseenergin

$$W_{k,r} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot m \cdot \omega^2 \approx 1.6 \cdot 10^{29} \text{ Joule}\,.$$

■

2.10 Lite om kurvor i planet

2.10.1 Parametrisering av en kurva

Exempel 2.55 Vi beskriver en tågresa med konstant hastighet över Västgötaslätten) som (x,y) tågets positition (i något koordinatsystem) vid tiden t (h), som $(x,y) = (x_0,y_0)+t(\alpha,\beta)$. Vid tiden $t = 0$ befinner sig tåget på stationen i GBG och vid tiden $t = 1.5$ (h) i Falköping. Tågets hastighet är (α,β) km/h, ex.vis $(\alpha,\beta) = (60,80)$ (km/h). Dess *fart* är $|(\alpha,\beta)| = \sqrt{60^2+80^2} = 100$ km/h. Kurvan (som här är en linje) är parametriserad med parametern t (som här är tid i h).

■

Exempel 2.56 Kurvan $y = x^2$ har x som parameter.
Kurvan $(x(t),y(t)) = (2t,t^2-1)$ kan ritas genom att sätta ut några punkter. Lättare är dock att *eliminera* parametern. Eftersom $t = x/2$ kan vi skriva $y = (x/2)^2-1 = \frac{x^2}{4}-1$, alltså en parabel.
En cirkel kan inte beskrivas som *en* funktion y av variabeln x. Däremot kan den bekrivas m.h.a. en parameter. Ex.vis cirkeln med medelpunkt i $(1,-2)$ och radie 3 kan skrivas

$$(x,y) = (3\cos t+1, 3\sin t-2), \quad 0 \le t < 2\pi.$$

■

Exempel 2.57 Givet kurvan $(x,y) = (f(t),g(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad 0 \le t \le 2\pi$.

a) Bestäm tangentens ekvation där $t = \pi/3$.

b) Skissa kurvan.

c) Beräkna kurvans längd.

d) Beräkna den area som den inneslängda ytan har.

Lösning:

a)

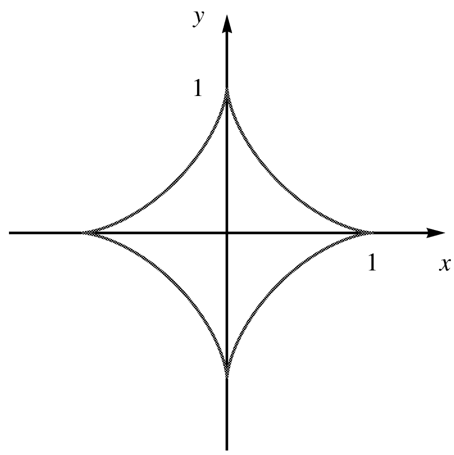
$$k(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t} = -\tan t \Rightarrow k(\pi/3) = -\sqrt{3}.$$

Linjen går genom punkten $(x_0,y_0) = (f(\pi/3),g(\pi/3)) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

Linjens ekvation är då

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}(2x-1)$$

b)



c) Kurvans längd är

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2} (9\sin^2 t\cos^4 t + 9\sin^4 t\cos^2 t)^{1/2} dt = \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6\,. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^1 ydx = 4\int_0^1 \left(1-x^{2/3}\right)^{3/2} d \\ &= \{x=\sin^3 t\} = 4\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{3/2} 3\sin^2 t\,\cos t\,dt = \\ &= 4\int_0^{\pi/2} 3\cos^4 t\sin^2 t\,dt\,. \end{aligned}$$

Nu är denna integrals värde densamma om man byter roller på sin och cos, Alltså är

$$\begin{aligned} A &= 6\int_0^{\pi/2} (\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt = 6\int_0^{\pi/2} (\sin t\cos t)^2 dt = \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = \frac{3\pi}{8}\,. \end{aligned}$$

■

Exempel 2.58 Ex. vis för ellipsen med medelpunkt i $(x,y)=(0,0)$ och halvaxlar $a>0$ och $b>0$ längs $x-$ respektive $y-$axeln, kan man parametrisera ellipsens ekvation genom

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Ellipsens längd L ges då av

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt\,.$$

Detta är en integral, som inte kan lösas med primitiv funktion uttryckt i elementära funktioner, utom i fallet $a = b$. I detta fall är kurvan en cirkel. Man kan alltså inte få ett enkelt uttryck för ellipsens längd. Integralen kallas *elliptisk* integral.

■

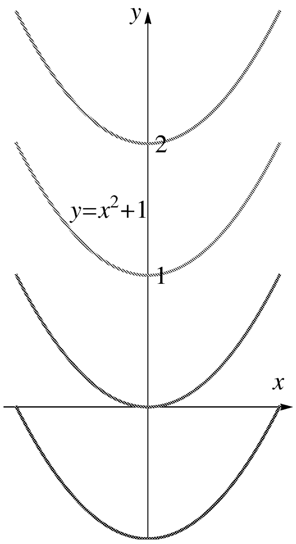
Kapitel 3

Differentialekvation

3.1 Differentialekvation (DE)

3.1.1 Linjär DE med konstanta koefficienter av ordning 1

Exempel 3.1 För ekvationen $y' = 2x$ måste $y = x^2 + C$. Vi kan rita y för olika konstanter C.



Vi säger att $y = x^2 + C$ är lösningen på DE:n.
Vi kan faktiskt ställa ett (rand- eller begynnelse-)villkor på den funktion som uppfyller DE:n, nämligen att kurvan $(x, y(x))$ skall gå genom en specifik punkt, i detta fall ex.vis genom $(x, y) = (-1, 2)$. Detta kan skrivas $y(-1) = 2$, som alltså är

$$2 = y(-1) = (-1)^2 + C = 1 + C \Leftrightarrow C = 1 \text{ så att } y = x^2 + 1\,.$$

Detta villkor ger alltså ett specifikt värde på konstanten C.

■

Exempel 3.2 Betrakta DE:n $y'(x) = -2y(x)$. Den är av ordning 1, ty y' är den högsta derivatan. kan skrivas $y' + 2y = 0$ (där vi undertrycker den oberoende variabeln.) Den är linjär p.g.a. termerna är y' och $2y$. En linjär DE kategoriseras vidare.

- Den är homogen ty HL$= 0$.

- Den är har konstanta koefficienter 1 och 2.
- DE:n kan skrivas $\frac{dy}{dx} = -2y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2dx$. Vi har därmed separerat variablerna. DE:n är *separabel.*

Vi kan lösa DE:n (med variablerna separerade), genom att integrera.

$$\frac{dy}{y} = -2dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Leftrightarrow$$

$$\ln y = C - 2x \Leftrightarrow y = e^{C-2x} = e^C \cdot e^{-2x} = C_1 e^{-2x}.$$

■

Exempel 3.3 DE:n $y' \cdot y + 1/x = 0$, $y(1) = 2$ är inte linjär, p.g.a. termen $y' \cdot y$. Den måste vi lösa med variabelseparation.

$$y' \cdot y = -1/x \Leftrightarrow y\,dy = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int y\,dy = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = C - \ln x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}\sqrt{C - \ln x}.$$

Randvillkoret $y(1) = 2$ ger att det endast är "+" som gäller d.v.s.

$$y = +\sqrt{2}\sqrt{C - \ln x}, \quad y(1) = 2 = \sqrt{2}\sqrt{C - \ln 1} \Rightarrow C = 2.$$

Alltså är $y = \sqrt{4 - 2\ln x}$

■

Exempel 3.4 DE:n $xy' + 2y = -2x$ är inhomogen, pg.a. HL och har icke-konstanta koefficienter (x framför y'). Den går inte att lösa med ovanstående metoder. I stället löses den med *integrerande faktor*, IF.

1. Dividera med x så att koefficienten framför y' blir 1, så att man får
$$y' + \frac{2}{x}y = -2.$$
2. Beteckna koefficienten framför y med $f = f(x) = \frac{2}{x}$.
3. Bestäm en primitiv funktion $F(x) = 2\ln x$ till $f(x)$.
4. Den integrerande faktorn I.F. är $e^{F(x)} = e^{2\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 = x^2$.
5. Multiplicera DE:n $y' + \frac{2}{x}y = -2$ med I.F. Detta ger
$$x^2y' + 2xy = -2x^2. \text{ och VL} = (x^2y)' \text{ samt HL} = -2x^2.$$
6. Integrera båda led:
$$x^2y = -\int 2x^2 dx = C - \frac{2x^3}{3} \Leftrightarrow y = \frac{C}{x^2} - \frac{2x}{3}.$$

■

Exempel 3.5 Lös DE:n $y'(t) + 2y(t) = 4t^2$

Lösning: Vi har redan löst $y'(t)+2y(t)=0$ (Exempel 3.2), som är en homogen DE. Den lösningen är $y=Ce^{-2t}$. Man kallar denna lösningen för *homogenlösningen* y_h till DE:n $y'(t)+2y(t)=4t^2$. Den kommer att ingå som en term i lösningen till denna DE. Den andra termen svarar mot det speciella HL $4t^2$ och kallas *partikulärlösning* $(=y_p)$. Detta ansätter man med ett "matchande" uttryck. Eftersom HL är ett polynom av grad 2 bör $y_p=At^2+Bt+C$. Insatt i DE:ns VL får vi

$$2At^2+2At+2Bt+B+2C=4t^2\,.$$

Genom att identifiera koefficienterna med varandra, får vi

$$A=2,\quad B=-2,\quad C=1 \text{ d.v.s. } y_p=2t^2-2t+1\,.$$

Lösningen på DE:n är

$$y=y_h+y_p=Ce^{-2t}+2t^2-2t+1\,.$$

■

Kommentarer

- DE:n $y'(t)+2y(t)=0$ är linjär, homogen med konstanta koefficienter. Den har en lösning på formen $y=Ce^{rt}$, där någon konstant r. Genom att sätta in detta y i DE:n får vi

$$y'(t)+2y(t)=Cre^{rt}+2Ce^{rt}=Ce^{rt}(r+2)=0\,.$$

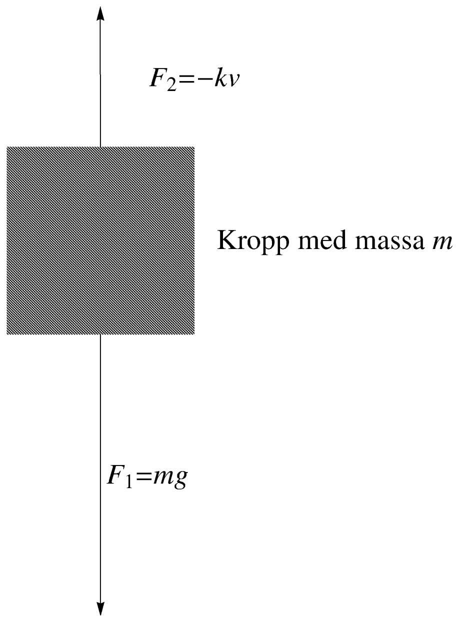
  Om inte $C=0$, så måste $r+2=0$, som är DE:ns *karakteristiska ekvation*, med rot $r=-2$. Alltså är $y=Ce^{-2t}$.

- Man kan också lösa DE:n i exemepel 3.5 med I.F. Då får man att

$$\left(e^{2t}\cdot y\right)'=4t^2e^{2t}\Leftrightarrow e^{2t}\cdot y=\int 4t^2e^{2t}dtx=\{\text{P.I.}\}=(2t^2-2t+1)e^{2t}+C$$

En tillämpning, fritt fall

Exempel 3.6 En fallande kropp med massa m, i vårt gravitationsfält påverkas av dels gravitationskraften $mg=:F_1$ och luftmotståndet F_2. Vi antar att den har hastigheten 0 vid tiden $t=0$. Vi antar att detta är proportionellt mot hastigheten v. D.v.s. $F_2=-kv$ för en proportionalitetskonstant $k>0$ med positiv referensriktning nedåt.



Den totala kraften F som påverkar kroppen är då $F_1 - F_2 = F = \{$enl. Newtons kraftekvation$\} = ma$, där a är kroppens acceleration. Vi får alltså

$$F_1 - F_2 = mg - kv = ma \Leftrightarrow ma + kv = mg\,.$$

Eftersom $a = v' = v'(t)$ är detta en linjär DE , inhomogen av första ordningen med konstanta koefficienter, som kan skrivas

$$mv' + kv = mg, \quad v(0) = 0\,.$$

Den kan faktiskt lösas med variabelseperation (P.g.a. att HL är en konstant, d.v.s. oberoende av tiden t).

$$mv' + kv = mg \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Leftrightarrow dt =$$

$$\frac{mdv}{mg - kv} = -\frac{mdv}{kv - mg} \Leftrightarrow t + C = -\frac{m}{k}\ln|kv - mg| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{k}{m}t + C_1 = \ln|kv - mg| = \ln(mg - kv) \text{ eftersom } v(0) = 0.$$

Vi tar e upphöjt till båda led.

$$e^{C_1}e^{-kt/m} = C_2e^{-kt/m} = mg - kv \Leftrightarrow v = \frac{mg - C_2e^{-kt/m}}{k}\,.$$

Nu är $v(0) = 0$. Detta ger att

$$0 = \frac{mg - C_2}{k} \Leftrightarrow C_2 = mg \text{ så att } v = \frac{mg}{k}\cdot(1 - e^{-kt/m})\,.$$

Vissa nödvändiga egenskaper för denna lösning
Vi ser speciellt att $v(0) = 0$, vilket stämmer med begynnelsevillkoret.
Vad händer då t blir stort, d.v.s. då $t \to \infty$? Då får vi gränsvärdet(gränshastigheten) $\lim_{t\to\infty} v = \frac{mg}{k}$. Alltså, i praktiken en sluthastighet som därmed är $v_1 := \frac{mg}{k}$. Den beror på kroppens massa och planeten jordens tyngdacceleration, samt på "luftmotståndskoefficienten" k. Ju större den är desto lägre sluthastighet.
Accelerationen är (per definition)

$$\begin{aligned} a(t) \equiv v'(t) &= \frac{dv}{dt} = \{\text{i detta fall}\} = \frac{d}{dt}\frac{mg}{k}\cdot(1 - e^{-kt/m}) = \\ &= \frac{mg}{k}(0 - \left(-\frac{k}{m}\cdot e^{-kt/m}\right)) = ge^{-kt/m}\,. \end{aligned}$$

Speciellt är $v'(0) = a(0) = g$, d.v.s. vid tiden $t = 0$ har man accelerationen g, vilket är naturligt.
Vad blir accelerationen $a(t)$, då t ökar? Vi låter $t \to \infty$. Då får vi gränsvärdet $a = 0$, d.v.s. kroppens acceleration går mot noll. I praktiken uppnår kroppen ganska snart en konstant hastighet och accelerationen blir (därmed) 0.

■

> **Definition 3.1** En differentialekvation av ordning n i en funktion y, är en ekvation som innehåller n :e derivatan $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$, som högsta derivata.

3.1.2 Olika typer av DE

- $y'(t) = -2y(t)$ kan ekvivalent skrivas $y'(t) + 2y(t) = 0$. P.g.a. att termerna är av typ Ay' och By, så kallas DE:n *linjär*.
  P.g.a. att HL$= 0$ kallas den *homogen*.
  Eftersom $A = 1$ och $B = 2$, konstanter, så har den *konstanta koefficienter*.
  Denna typ löses med *karakteristisk ekvation*.
- DE:n $\dfrac{y'}{y^2} + x = 0$ är inte linjär (Icke-linjär). Denna typ löses med *variabelseparation*.
- DE:n $y'(x) = -xy(x)$ kan skrivas $y' + xy = 0$ och är alltså linjär och homogen
- DE:n $y'(x) = -xy(x) + x$ kan skrivas $y' + xy = x$ och är linjär och *inhomogen* ty HL $x \neq 0$ med icke-konstanta koefficenter.
- DE:n $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0$ är linjär homogen med konstanta koefficienter och av ordning 2.

Samtliga DE ovan utom den sista är av *första ordningen* eftersom den högsta ordningen av derivata är 1.

Exempel 3.7 Lös DE:n $y' \cdot y + x = 0$.

Lösning: Vi skriver DE:n så här med åtföljande omskrivningar som separerar variablerna x och y.

$$\ldots \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = -x \Longleftrightarrow y\,dy = -x\,dx$$

Nu är variablerna x och y separerade. Därefter följer integration av båda led.

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + C \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

■

Exempel 3.8

a) Lös DE:n $y'(x) = -xy(x)$.

Lösning: Denna DE kan lösas med variabelseparation. Vi får

$$\frac{dy}{y} = -xdx \Leftrightarrow \ln y = C - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow y = e^{C-\frac{x^2}{2}} = e^C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

b) Lös DE:n $y'(x) = -xy(x) + x$.

Lösning: Vi kan skriva DE:n som

$$y' + xy = x\,.$$

Den är linjär, med icke-konstanta koefficienter (x framför y) och inhomogen, p.g.a. x i HL. Den är vidare av 1:a ordningen. En sådan DE löses med *integrerande faktor* (IF). Man ser till att faktorn framför y' är 1, vilket är fallet här. Funktionen framför y är $x =: f(x)$. Man tar sedan en primitiv funktion till denna $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Den integrerande faktorn är

$$\text{I.F.} = e^{F(x)} = e^{x^2/2}\,.$$

Man multiplicerar sedan DE:n med den integrerande faktorn.

$$= e^{x^2/2}(y' + xy) = e^{x^2/2}x\,.$$

VL är då en produkt av I.F. $e^{x^2/2}$ och den sökta funktionen y. D.v.s. Vi får ekvationen och följande ekvivalenta ekvationer

$$\left(e^{x^2/2} \cdot y\right)' = e^{x^2/2}x \Leftrightarrow e^{x^2/2} \cdot y = \int e^{x^2/2}xdx = e^{x^2/2} + C \Leftrightarrow$$

$$y = 1 + Ce^{-x^2/2} \text{ (svar)}\,.$$

■

3.2 De av ordning 2

Vi tar bar upp linjära DE av andra ordningen.

3.2.1 Linjär DE med konstanta koefficienter av ordning 2

Exempel 3.9 DE:n $y'' - 4y = 0$ är en linjär, homogen, DE av *andra* ordningen med konstanta koefficienter. Vi utgår från att lösningen är termer på formen $y = Ce^{rx}$, (om nu y är en funktion av variabeln x). Karakteristisk ekvation är $r^2 - 4 = 0$ med rötter $r = \pm 2$. Lösningen till DE:n är $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.

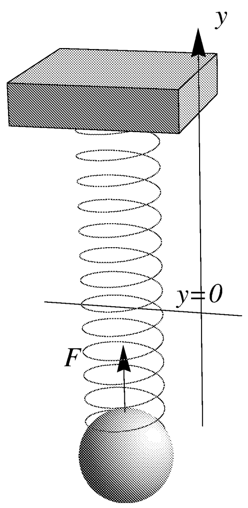
■

Exempel 3.10 DE:n $y'' + 4y = 0$ är linjär och homogen med konstanta koefficienter. Karakteristisk ekvation är $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$. Så att

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{2ix} + C_2e^{-2ix} = C_1(\cos 2x + i\sin 2x) + C_2(\cos 2x - i\sin 2x) = \\ &= (C_1 + C_2)\cos 2x + i(C_2 - C_2)\sin 2x = A\cos 2x + B\sin 2x\,. \end{aligned}$$

■

Exempel 3.11



En fjäder är belastad med en vikt (kula) med massa m. Kulna och fjädern sätts i svängning i lodrät ledd kring jämviktsläget $y = 0$. Krafterna som påverkar fjädern är $-k \cdot y$, där $k > 0$ är fjäderkonstanten. Newtons kraftekvation ger $ma = -ky \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + k \cdot y = 0$, en linjär DE av ordning 2 med konstanta koefficienter. Den är dessutom homogen (Inga utifrån verkande krafter). Denna DE har lösningen $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, där $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$, d.v.s. utslaget 0 vid tiden $t = 0$ blir $A = 0$. så att

$$y = B\sin\omega t\,.$$

■

Exempel 3.12 Antag att $y = y(t)$ är en funktion som uppfyller DE:n

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2\,.$$

Bestäm funktionen y!

Lösning: DE:n är av ordning 2, linjär homogen och med konstanta koefficienter. Dess karakteristiska ekvation, med lösning, är

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Longleftrightarrow r = -1 \pm 2i\,.$$

Vi får lösningen

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{(-1+2i)t} + C_2e^{(-1-2i)t} = \{\cos(-t) = \cos t,\ \sin(-t) = -\sin t\} = \\ &= e^{-t}\left(C_1(\cos 2t + i\sin 2t) + C_2(\cos 2t - i\sin 2t)\right) = \\ &= e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)\,. \end{aligned}$$

Rand- eller begynnelsevillkoren ger att

$$\begin{cases} y(0) & = 0 = A \text{ och} \\ y'(0) & = 2 = -A + B \end{cases}$$

så att $y = 2e^{-2t}\sin t$ (Svar).

■

3.2.2 Inhomogen Linjär DE av andra ordningen

Exempel 3.13 De:n $y'' + 4y = 8e^{2x}$ har en lösning y som kan delas upp i en homogen- och en partikulärlösning. $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$ och y_p ansätter vi som $y_p = Ce^{2x}$. Då blir $y_p'' = 4Ce^{2x}$. Insatt i DE:n ger detta

$$y_p'' + 4y_p = 4Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = 8Ce^{2x} = 8e^{2x} \Leftrightarrow C = 1\,.$$

Lösningen på DE:n är därmed

$$y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + e^{2x}\,.$$

■

Exempel 3.14 Lös DE:n

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 5e^{-t} + 6\sin(t), \\ \\ y(0) = 5, y'(0) = -1 \end{cases}$$

Lösning: $y_h = A\cos 2t + B\sin 2t$. Vi har två olika typer av termer i HL, så vi tera fram två olika partikulärlösningar.

$$y_{p_1} = Ae^{-t}, \quad \text{och } y_{p_2} = B\cos t + C\sin t\,.$$

Dessa sättes in en och en i DE:n med motsvarande HL.

$$y_{p_1}''(t) + 4y_{p_1}(t) = Ae^{-t} + 4Ae^{-t} = 5e^{-t} \Rightarrow A = 1\,.$$

$$y_{p_2}''(t) + 4y_{p_2}(t) = -B\cos t - C\sin t + 4(B\cos t + C\sin t) = 6\sin t \Leftrightarrow A = 0, \quad B = 2\,.$$

Alltså är $y(t) = e^{-t} + 2\sin t + A\cos 2t + B\sin 2t$. Vi har nu två begynnelsevillkor (eller randvillkor), som är

$$5 = y(0) = 1 + A \Leftrightarrow A = 4$$

och

$$-1 = y'(0) = -1 + 2 - 2A\cdot 0 + 2B\cdot 1 \Leftrightarrow -2 = 2B \Leftrightarrow B = -1\,.$$

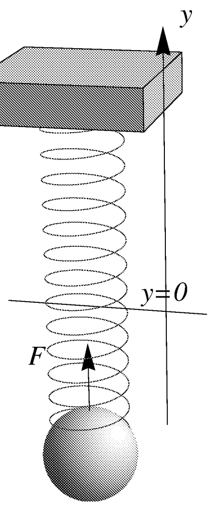
Svar: $y(t) = e^{-t} + 2\sin t + 4\cos 2t - \sin 2t\,.$

■

Kommentarer

- Observera att konstanterna A, B och C används i olika betydelser.
- Vi ansätter alltså $y_{p_2} = B\cos t + C\sin t$, även om det bara är en $sin-$term i HL.

Exempel 3.15



En fjäder är belastad med en vikt (kula) med massa m. Kulan och fjädern sätts i gungning i lodrät ledd kring jämviktsläget $y = 0$ (som i exempel 3.11. Krafterna som påverkar fjädern är $-k \cdot y$, där $k > 0$ är fjäderkonstanten. Newtons kraftekvation ger $ma = -ky \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + k \cdot y = 0$, en linjär DE av ordning 2 med konstanta koefficienter.

(a) Vi kan tänka oss att fjädern+kulan utsätts av en yttre kraft $F_1 = e^{-t}$, d.v.s.

$$my'' + ky = e^{-t}.$$

Funktionen y, som lösning till denna DE, består av två termer $y_h = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, där $\omega^2 = \frac{k}{m}$ och $y_p = Ce^{-t}$ och y_p insatt i DE:n ger

$$my_p'' + ky = (m+k)Ce^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow C = \frac{1}{m+k}$$

så att

$$y = y_h + y_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{e^{-t}}{m+k}.$$

(b) Nu tänker oss att vi har en yttre kraft $4m\sin\omega t$, d.v.s. av samma typ som en term i homogenlösningen. DE:n är

$$my''(t) + ky(t) = 4m\sin\omega t$$

och med $\frac{k}{m} = \omega^2$ kan den skrivas

$$y'' + \frac{k}{m}y?y'' + \omega^2 y = 4\sin\omega t.$$

Att ansätta $y_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ger inget eftersom dessa termer ingår i y_h. I stället skall vi ta till en komplex metod med $z = z(t) = x(t) + iy(t) = x + iy$ och HL $4e^{i\omega t}$. Då är $\operatorname{Im} z = y$ lösningen på vår DE. Vi får DE:n

$$z'' + \omega^2 z = 4e^{i\omega t}, \quad \text{sätt } z = u \cdot e^{i\omega t}.$$

Denna DE blir då

$$e^{it\omega}\left(u''(t) + 2i\omega u'(t)\right) = 4e^{i\omega t}.$$

Dels blir det en DE av ordning 2 men utan nolltegradsterm och dels kan $e^{i\omega t}$ förkortas. Denna DE kan lösas, först genom att sätta $u' = v$ varvid vi får en DE av ordning 1.

$$u(t) = \frac{ic_1 e^{-2it\omega}}{2\omega} + c_2 - \frac{2it}{\omega}.$$

$$\begin{aligned} z(t) &= u(t)e^{i\omega t} = \frac{c_1 \sin(\omega t)}{2\omega} + ic_2 \sin(\omega t) + \frac{ic_1 \cos(\omega t)}{2\omega} + \\ &+ c_2 \cos(\omega t) + \frac{2t \sin(\omega t)}{\omega} - \frac{2it \cos(\omega t)}{\omega}, \end{aligned}$$

var imaginärdel är

$$y = y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t - \frac{2t \cos(\omega t)}{\omega},$$

som är DE:ns lösning. Observera att lösningen innehåller termen $-\dfrac{2t\cos(\omega t)}{\omega}$, som är en obegränsad funktion i t. Detta betyder att fjäder och vikt svänger allt högre amplitud, då t ökar.

■

Exempel 3.16 Givet DE:n

$$y'' + 3y' + 2y = 4e^{-x}.$$

Lös DE:n!

Lösning: DE:n är av andra ordningen, linjär inhomgeon med konstanta koefficienter (1, 3 och 2). Vi delar upp $y = y_h + y_p$ Vi börjar med y_h. Karakteristisk ekvation är

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \iff r = r_1 = -1,\ r = r_2 = -2, \text{ som ger } y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$

Nu till y_p. Vi ser att HL ingår som term i y_h. Då duger inte ansättningen $y_p = Ce^{-x}$. I stället (knep 2), sätt $y = e^{-x} \cdot u$, där $u = u(x)$ är en ny funktion. då blir

$$\begin{aligned} y' &= e^{-x}u' - e^{-x}u = e^{-x}(u' - u) \\ &\text{och} \\ y'' &= e^{-x}u'' - 2e^{-x}u' + e^{-x}u \end{aligned}$$

Insatt i DE:n vi

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}(u'' + u') = 4e^{-x} \iff u'' + u' = 4 \iff u' + u = 4x + C_1.$$

Den sista DE:n kan vi lösa med I.F.$= e^x$. Multiplikation med denna faktor i den sista DE:n ger

$$(e^x u)' = (4x + C_1)e^x \Longleftrightarrow e^x u = (4x + C_1)e^x - \int 4e^x dx = (4x + C_2)e^x + C_3 .$$

Nu är

$$y = e^{-x}u = e^{-2x}((4x + C_2)e^x + C_3) = (4x + C_2)e^{-x} + C_3 e^{-2x} .$$

■

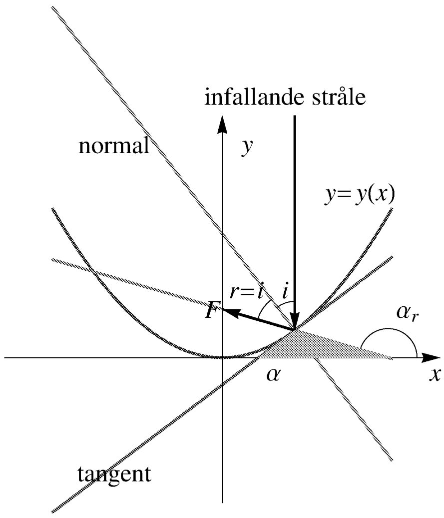
Kommentarer

- Givet en linjär DE
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)} = g(x) \tag{3.1}$$
där $a_n \neq 0$ och alla koefficienter a_k konstanta.
Då, kan man visa, kan VL skrivas som ett polynom i D "gånger" y.
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot D^k \right) y = p(D)y \tag{3.2}$$
Med bytet $y = e^{\alpha x}u$ kan detta VL skrivas
$$e^{\alpha x} \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k u^{(k)} . \tag{3.3}$$
För att veta hur koefficienterna a_k och b_k hänger ihop, måste man skriva $y' = \dfrac{dy}{dx} = Dy$. Då är
$$\begin{array}{rcl} y' & = & Dy = e^{\alpha x}(D + \alpha)u \\ & & \text{och allmänt} \\ y^{(k)} = D^k y & = & e^{\alpha x}(D + \alpha)^k u, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{array} \tag{3.4}$$
- För en DE, som $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-x}$ kan VL skrivas
$$(D^2 + 3D + 2)y = (D + 2)(D + 1)y .$$
Med bytet $y = e^{\alpha x}u$ kan man lätt övertyga sig om att DE:n:s VL blir
$$e^{\alpha x}(D + 2 + \alpha)(D + 1 + \alpha)u .$$
I detta exempel väljer vi $\alpha = -1$ och får
$$e^{-x}(D + 1)Du = \{\text{Sätt lika med HL}\} = 4e^{-x} .$$
Vi ser att DE:ns VL inte innehåller någon term med u, utan endast u' och u'' och att vi kan förkorta e^{-x} och får en enklare DE.
- **RÅDET är att, för en linjär DE med konstanta koefficienter och ett HL $A\,e^{rx}$ som ingår som term i y_h, sätt**
$$y = e^{rx}u$$
- Sambandet mellan (3.2) och (3.3) är
$$p(D)y = e^{\alpha x} p(D + \alpha)u .$$

Exempel 3.17

Reflexion av lodrät parallellt infallande strålar på en spegel

Hur skall en spegel vara formad för att parallellt infallande strålar skall reflekteras mot ett gemensamt fokus F? Detta är ett klassiskt problem löst redan under Antiken. Vi skall här komma fram till lösningen via en differentialekvation.



I figuren ser vi att
$\alpha = i$ och i den gröna triangeln får vi vinkelsumman $\alpha + \pi/2 + i + \pi - \alpha_r = \pi (= 180°)$. Eftersom $i = \alpha$, får vi

$$2\alpha + \pi/2 = \alpha_r.$$

Nu kan vi uttrycka $\tan\alpha_r$ i $\tan\alpha$. Observera att $\tan\alpha_r$ är riktningskoefficienten för den reflekterade linjen. Och denna linje går genom punkterna $(0, F)$ och skärningspunkten med kurvan och alltså genom (x, y). Denn linjes riktningskoefficent är alltså $\dfrac{y-F}{x-0} = \dfrac{y-F}{x}$. Vi får alltså att

$$\tan\alpha_r = \tan(2\alpha + \pi/2) = \frac{y-F}{x} \text{ och } \tan\alpha = y'.$$

M.h.a. trigonometri skall vi uttrycka $\tan(2\alpha + \pi/2)$ i $\tan\alpha$:

$$\begin{aligned}
\tan(2\alpha+\pi/2) &= \frac{\sin(2\alpha+\pi/2)}{\cos(2\alpha+\pi/2)} = \frac{\sin(2\alpha+\pi/2)}{\cos(2\alpha+\pi/2)} = \frac{\cos(2\alpha)}{-\sin(2\alpha)} = \\
&= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{-2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{1/\cos^2\alpha}{1/\cos^2\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{-2\tan\alpha} = \\
&= \frac{y'^2-1}{2y'}.
\end{aligned}$$

Detta ger nu differentialekvationen

$$\frac{y'^2-1}{2y'} = \frac{y-F}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{y-F}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y-F}{x}\right)^2 + 1}.$$

Här behvös ett knep. Sätt $\dfrac{y-F}{x} = z \Leftrightarrow y - F = xz \Rightarrow y' = xz' + z$. Insatt i ekvationen ovan, där vi bortser från "minus" i "$\pm$", får vi

$$xz' + z = z + \sqrt{z^2+1} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}.$$

Vi löser dessa integraler.

$$\ln x + C = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) \Leftrightarrow kx = z + \sqrt{z^2+1} \Leftrightarrow$$

$$(kx-z)^2 = k^2x^2 - 2kxz + z^2 = z^2 + 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$k^2x^2 = 2kx \cdot \frac{y-F}{x} + 1 = 2k(y-F) + 1\,.$$

Vi sätter in randvillkoret $y(0) = 0$, som ger

$$0 = 2k(0-F) + 1 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{2F}$$

så att ekvationen ovan blir

$$\frac{1}{4F^2} \cdot x^2 = \frac{1}{F}(y-F) + 1 = \frac{y}{F} \Longleftrightarrow y = \frac{x^2}{4F}\,.$$

■

Kapitel 4

Taylorutvecklingar

4.1 Taylorpolynom m.m.

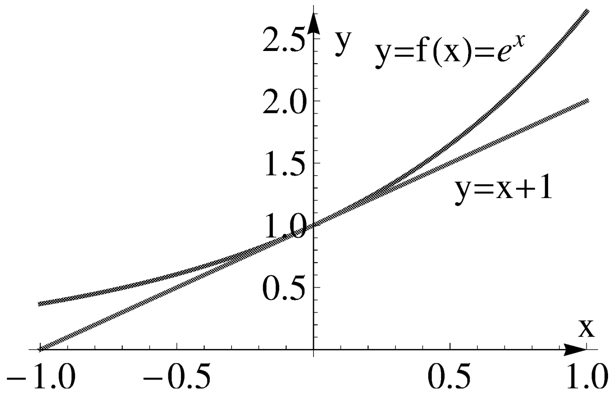
4.1.1 Fakultet

$0! = 1$, (läses "noll-fakultet"). $1! = 1$. Vidare är $2! = 1 \cdot 2 = 2$ och $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Allmänt för $n = 1, 1, 2, ...,$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 2 ... \cdot (n-1) \cdot n$. Ex.vis är $52! \approx 10^{67}$ antalet ordningar som korten i en kortlek med 52 kort kan ligga. Speciellt är $\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$.

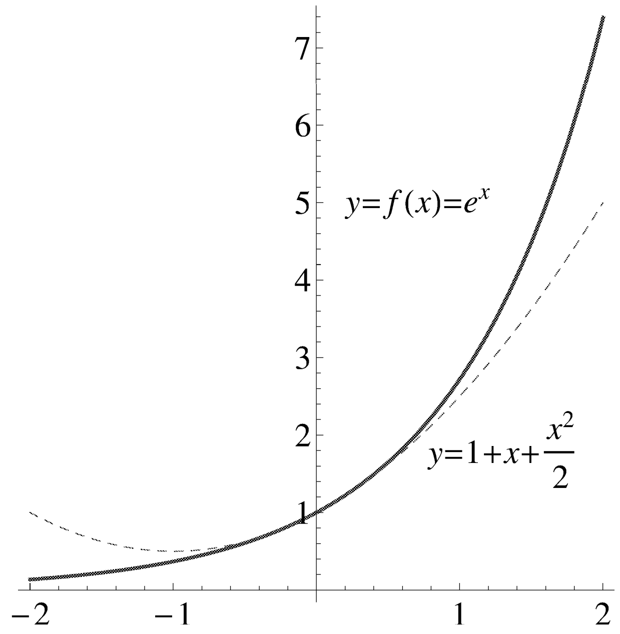
4.1.2 Några funktioners kurvor och dito Taylorpolynom

Exempel 4.1

- Vi ritar funktionen $y = f(x) = e^x$ och $y = 1 + x$ för $x \approx 0$.



- Nedan: Kurvan $y = f(x) = e^x$ och kurvan $y = 1 + x + x^2/2$ för $x \approx 0$



■

4.1.3 Hur man bestämmer ett sådant polynom

Exempel 4.2 I den sista figuren kallar vi polynomet $p_2(x)$. Vi ser att $f(x)$ och $p_2(x)$ sammanfaller i $x=0$, d.v.s. $f(0)=p_2(0)$. Likaså är $f'(0)=p_2'(0)$. I detta exempel är $x=0$ den punkt som vi identifierar funktion och polynom. Polynomet är ett Maclaurinpolynom (*utveckling* kring $x=0$), ett specialfall av ett Taylorpolynom (*utveckling* kring x_0.) Vi utvecklar

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_0(x)+\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \{\text{P.I.}\} = f_0(x)+\left[(t-x)f'(t)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}(t-x)f''(t)dt = \\
&= \{\text{P.I.}\} = f_0(x)+(x-x_0)f'(x_0) - \left[\frac{(t-x)^2}{2}f''(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\frac{(t-x)^2}{2}f''(t)dt = \\
&= f_0(x)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(t-x)^2}{2}f''(t)dt = \{\text{P.I.}\} = \\
&= f_0(x)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\left[\frac{(t-x)^3}{2\cdot 3}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}\frac{(t-x)^3}{2\cdot 3}f^{(4)}(t)dt = \\
&= f_0(x)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{2\cdot 3}f'''(x_0) - \int_{x_0}^{x}\frac{(t-x)^3}{2\cdot 3}f^{(4)}(t)dt\,.
\end{aligned}$$

Vi får för en funktion $f(x)$ som är $n+1$ ggr kontinuerligt deriverbar att

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)}{0!}+f'(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^1}{1!}+f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+ \\
&+ f^{(n)}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}+(-1)^n\int_{x_0}^{x}\frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = \\
&= p_n(x)+R_n(x)\,.
\end{aligned}$$

■

Exempel 4.3 Vi skall bestämma Maclaurinpolynomet för $f(x) = e^x$ av grad n. $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$. Alltså är Maclaurinpolynomet

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Man kan få en bra numerisk uppskattning av e. Sätt $x = 1$ och $n = 2$. Detta ger $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ och $p_2(1) = 2.5$. P.s.s. är $p_4(1) \approx 2.70833$, $p_6(1) \approx 2.71806$. De första 100 siffrorna i decimalutvecklingen av e är

$$\begin{aligned} e \;=\; & 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669 \\ & 6762772407663035354759457138217852516642 7... \end{aligned}$$

■

Vi har att

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,. \tag{4.1}$$

Exempel 4.4 Vi byter x mot ix i (4.1). Vi får då

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = 1 - + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right)$$

Detta ger alltså Maclaurinserierna för $\cos x$ och $\sin x$ (Identifiera realdelarna med varandra och p.s.s. med imaginärdelarna.)

■

Exempel 4.5

a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1, 2 och 3 av $f(x) = 2x^3 - 2x + 3$ i $x = x_0 = 1$.

Lösning:

$$f(x) = 2x^3 - 2x + 3, \quad f'(x) = 6x^2 - 2, \quad f''(x) = 12x, \quad f^{(3)}(x) = 12\,,$$

så att

$$f(1) = 3, \quad f'(1) = 4, \quad f''(1) = 12, \quad f^{(3)}(1) = 12\,.$$

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 3 \\ p_1(x) &= p_0(x) + 4(x-1) = -1 + 4x \\ p_2(x) &= p_1(x) + 12 \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} = -1 + 4x + 12x^2/2 - 12x + 6 = 5 - 8x + 6x^2 \\ p_3(x) &= 3 - 2x + 2x^3 \end{aligned}$$

b) Bestäm Maclaurinpolynomet av $e^{2x} \cdot \cos x$ av grad 3.

Lösning: Det gäller att utveckla de två faktorerna tillräckligt långt.

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots \text{ och } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Detta ger

$$e^{2x}\cos x = (1+2x+2x^2+4x^3/3+\ldots)(1-x^2/2+x^4/24+\ldots) = 1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

Svar: $1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

c) Beräkna $\int_0^1 e^{\sin x}\,dx$, genom att integerera motsvarande Maclaurinpolynom av grad 3.

Lösning:

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + (\sin x) + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + \ldots \approx \\ &\approx 1 + (x - x^3/6) + \frac{1}{2}\left(x - x^3/6\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - x^3/6\right)^3 + \ldots = \\ &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$p_3(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \Rightarrow \int_0^1 p_3(x)dx = \ldots = \frac{5}{3} \approx 1.67\,.$$

En numerisk beräkning ger 1.63187.

■

4.2 Fler Maclaurinserier

Exempel 4.6 Den geometriska serien är

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots = a(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = a \cdot \frac{1}{1-x}, \text{ om } |x| < 1\,. \quad (4.2)$$

Vi kan modifiera den. Först sätter vi $a = 1$ och sedan byter vi x mot $-x$ och får

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1\,.$$

Om vi integrerar denna serie på intervallet $[0,x]$ (och samtidigt byter x mot t som integrationsvariabel), och om termvis integration är tillåten, får vi

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\,,$$

som är Maclaurinserien för $\ln(x+1)$. Vi skall senare visa att den är konvergent för $|x| < 1$. P.s.s. kan vi byta x mot $-x^2$ i (4.2) och få

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k\,,$$

som vi integerar på intervallet $[0,x]$. Detta ger

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Man kan visa att HL är konvergent om $|x| < 1$.

■

Exempel 4.7 a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\arctan^2 x}$$

Man kan lösa gränsvärdet ovan m.h.a. Taylorutveckling, eller med *Taylorserie*. I detta fall beräknar vi serien i $x_0 = 0$, d.v.s. en *Maclaurinserie*. Täljaren är

$$x \sin x = x(x - x^3/3! + x^5/5! + \ldots)$$

och nämnaren är

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)^2$$

så att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x(x - x^3/3! + x^5/5! + \ldots}{\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)^2} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2} = \frac{1 + \text{termer av högre grad}}{1 + \text{termer av högre grad}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x \sin x)^2}{x^2 - \tan^2 x}$$

Lösning: Vi skriver om täljaren som

$$T(x) := x^2(x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots)^2 = x^4 - x^6/3 + 2x^8/45 + \text{termer av högre grad}$$

Nämnaren skriver vi som

$$N(x) = (x - \tan x)(x + \tan x)$$

och

$$f(x) := \tan x \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x \quad f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) \quad f'''(x) = 2(1 + \tan^2 x + 3\tan^2 x(1 + \tan^2 x))$$

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = 2$$

så att $f(x) = \tan x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \text{termer av högre grad}$. Därmed är

$$\begin{aligned} N(x) &= (x - (x + x^3/3 + \text{termer av högre grad}))(x + (x + x^3/3 + \text{termer av högre grad})) = \\ &= -\frac{2x^4}{3} + \text{termer av högre grad}. \end{aligned}$$

Därmed är

$$\frac{(x \sin x)^2}{x^2 - \tan^2 x} = \frac{x^4 + \text{termer av högre grad}}{-\frac{2x^4}{3} + \text{termer av högre grad}} \cdot \frac{1/x^4}{1/x^4} = \frac{1 + \text{termer av högre grad}}{-2/3 + \text{termer av högre grad}}$$

och det är klart att det sista uttrycket går mot

$$\frac{1}{-2/3} = -\frac{3}{2} \text{ då } x \to 0.$$

■

4.2.1 Lite knep för att bestämma Taylorutveckling m.m.

1. För funktionen $f(x) = \cos^2 x$, kan man utnyttja omskrivningen $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ och sedan utnyttja att
$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots$$
Ex.vis är Maclaurinpolynomet av $\cos^2 x$ av grad 3 lika med
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!}\right) = 1 - x^2 .$$

2. För den sammansatta funktionen $e^{\cos x}$ kan Maclaurinpolynomet av grad 4 tas fram genom att se att $x = 0$ ger $\cos x = \cos 0 = 1$. Därför skall den yttre funktionen e^z med $z = \cos x$ utvecklas i $z = 1$. Vi vill dock utnyttja att vi känner Maclaurinpolynomen för e^z. Därför skriver vi om funktionen som
$$e^{\cos x} = e^{\cos x - 1 + 1} = e \cdot e^{\cos x - 1}$$
och nu är den inre funktionen $z = \cos x - 1$, som är noll om $x = 0$. Därför kan vi utveckla $e^{\cos x - 1} = e^z$ i $x_0 = 0$. Den inre funktionen $z = \cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots$ Fortsättningen blir
$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e \cdot e^{\cos x - 1} = e \cdot e^z = e(1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \ldots) = \\ &= e(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \right)^3 + \ldots) = \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^4\left[\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right] + \ldots\right) = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \ldots\right) \end{aligned}$$
Maclaurinpolynomet av grad 4 av funktionen $e^{\cos x}$ är alltså $e\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6}\right)$ (Svar).

3. Man brukar säga att allt som liknar ett Taylorpolynom också är ett Taylorpolynom.

4.3 Fyra satser

Vi antar att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion i intervallet $[a, b]$, $a \leq b$.

Teorem 4. 1 *(Satsen om största och minsta värde) $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde på $[a, b]$, säg $f_{\max}$ och $f_{\min}$.*

Teorem 4. 2 *(Satsen om mellanliggande värde) $f(x)$ antar alla värden mellan det största och minsta värdet.*
Annorlunda uttryckt; För varje y: $f_{\min} \leq y \leq f_{\max}$, finns ett $x-$värde ξ i intervalelt $[a, b]$, sådant att $f(\xi) = y$.

Teorem 4. 3 *(Triangelolikheten för integral)*
Med samma förutsättningar som ovan är
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx . \tag{4.3}$$

Bevis:

Eftersom $a \leq b$ och $\pm f(x) \leq |f(x)|$, så är

$$\int_a^b \pm f(x)dx = \pm \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dett är ekvivalent med (4.3).

∎

Teorem 4. 4 *(En medelvärdessats för integraler) Antag dessutom att $g(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och att $g(x)$ inte växlar tecken i intervallet. Då finns $\xi \in [a,b]$, sådant att*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Bevis:

Vi antar att $g(x) \geq 0$ och att $\int_A^b g(x)\,dx =: B > 0$. Då är

$$f_{\min}\, g(x) \leq f(x)\, g(x) \leq f_{\max}\, g(x)$$

där $f_{\min}$ och $f_{\max}$ är definierade ovan. Vi integrerar alla tre uttrycken och får då bibehållna olikheter, d.v.s.

$$f_{\min} \cdot B \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq f_{\max} \cdot B$$

Detta kan ekvivalent skrivas

$$f_{\min} \leq \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{B} =: y \leq f_{\max}.$$

Enligt satsen om melenliggande värde, finns $\xi \in [a,b]$, sådan att

$$f(\xi) = y = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{B}.$$

Genom att multiplicera med B följer (4.4).

∎

4.4 Omskrivning av resttermen

4.4.1 Lagranges form

$$R_n(x) = (-1)^n \int_{x_0}^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{4.5}$$

Man kan lätt konstatera att $\frac{(t-x)^n}{n!}$ inte ändrar tecken för $x_0 \leq t \leq x$ eller $x \leq t \leq x_0$. Vi antar först att $x_0 \leq t \leq x$. Då är $t - x \leq 0$ för alla $t \in [x_0, x]$. Fallet $x \leq t \leq x_0$ visas p.s.s. Alltså kan resttermen, m.h.a. (4.4) skrivas

$$R_n(x) = (-1)^n f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x \frac{(t-x)^n}{n!}\,dt = (-1)^n f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exempel 4.8 Bestäm de 4 första siffrorna i talet e. Utgå från att $e \leq 3$.

Lösning: Vi använder Maclaurinutvecklingen av $f(x) = e^x$. Resttermen $R_n(x) = \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$. Vi sätter $x = 1$ och får

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1).$$

Vi behöver ha n så stort att $|R_n(1)| \leq 10^{-4}$. Vi ser snart att $n = 7$ ger att

$$|e - p_7(1)| = |R_7(1)| \leq \frac{3}{8!} < 10^{-4}.$$

Alltså räckerdet att bestämma de fyra första siffrorna i $p_7(1)$:

$$p_7(1) = 2.71825...$$

så at e:s första fyra siffror är 2.718 .

■

4.4.2 Ordoform

Vi betecknar en begränsad funktion med $B(x)$ (med olika index). För ex.vis gränsvärdesberäkning, då $x \to x_0$, behöver man endast veta storleken på resttermen. Vi ser att resttermen Består av två faktorer, dels $f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{(n+1)!}$, som är en begränsad funktion $B(x)$ av x, då x nära x_0.

Definition 4.1 Ett uttryck $h(x)$ som kan skrivas $B(x) \cdot (x - x_0)^k$, där $B(x)$ är begränsad för x nära x_0, betecknas $O((x - x_0)^k)$.

Exempel 4.9 Ex.vis är

$$\begin{aligned}
O(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3) &= O((x-x_0)^2) \\
O(x-x_0)^2 \cdot O((x-x_0)^3) &= O((x-x_0)^5) \\
O(x-x_0)^2 + (x-x_0)^3 &= O((x-x_0)^2) \\
O(x-x_0)^2 \cdot (x-x_0)^3 &= O((x-x_0)^5) \\
\frac{O(x-x_0)^3}{(x-x_0)^2} &= O(x-x_0)
\end{aligned}$$

■

Exempel 4.10 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x \sin x)^2}{x^2 - \tan^2 x}.$$

genom att använda ordoform.

Lösning: Vi låter $x_0 = 0$, d.v.s. använder Maclaurinutvecklingar. Nämnaren:

$$x^2 - (x + x^3/3 + O(x^5))^2 = x^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^4 + O(x^6).$$

Täljaren:

$$x^2(x - x^3/3! + O(x^5))^2 = x^4 + O(x^5)$$

och slutligen

$$\frac{\text{Täljaren}}{\text{Nämnaren}} = \frac{x^4 + O(x^5)}{-\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)} \cdot \frac{1/x^4}{1/x^4} = \frac{1 + O(x^2)}{-2/3 + O(x^2)} \to -\frac{3}{2}$$

då $x \to 0$.

■

4.5 Maclaurinutveckling av sinus och cosinus

4.5.1 Sinus

Vi bestämmer den allmänna Maclaurinutvecklingen av $\sin x$ i $x_0 = 0$. Vi behöver komma ihåg att $\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t$ och $\frac{d}{dt}\sin t = \cos t$ samt formeln för partiell integration.

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin x - \sin 0 = \int_0^x 1 \cdot \cos t\, dt = \{\text{P.I.}\} = [(t-x)\cos t]_0^x + \int_0^x (t-x)\sin t\, dt = \\
&= x + \left[\frac{(t-x)^2}{2}\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2}\cos t\, dt = x - (0-0) - \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2}\cos t\, dt = \\
= \{\text{P.I.}\} &= x - \left[\frac{(t-x)^3}{3!}\cos t\right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!}\sin t\, dt = x - \frac{x^3}{3!} - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!}\sin t\, dt = \\
= \{\text{P.I.}\} &= x - \frac{x^3}{3!} - \left[\frac{(t-x)^4}{4!}\sin t\right]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^4}{4!}\cos t\, dt = \\
&= x - \frac{x^3}{3!} - 0 + 0 + \int_0^x \frac{(t-x)^4}{4!}\cos t\, dt\,.
\end{aligned}$$

Vi ser att i de två sista raderna är polynomet detsamma, $x - \frac{x^3}{3!}$. Det betyder att vi har likhet mellan dito resttermer, d.v.s. $R_3(x) = R_4(x)$. Man väljer alltid resttermen med jämnt index, alltså $R_2(x)$, $R_4(x)$, $R_6(x)$ etc. Därmed är

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^{2n}}{(2n)!}\cos t\, dt\,. \tag{4.6}$$

4.5.2 Cosinus

Först iakttar vi att $\int_0^x (-\sin t)\, dt = \cos x - \cos 0$, så att med partiell integration får vi

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \int_0^x 1 \cdot \sin t\, dt = \{\text{P.I.}\} = 1 - [(t-x)\cdot \sin t]_0^x + \int_0^x (t-x)\cos t\, dt = \\
&= 1 - 0 + 0 + \left[\frac{(t-x)^2}{2!}\cos t\right]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2!}\sin t\, dt = \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2!}\sin t\, dt = \{\text{P.I.}\} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \left[\frac{(t-x)^3}{3!}\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!}\cos t\, dt = \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!}\cos t\, dt\,.
\end{aligned}$$

Även här får vi samma polynom med restterm $R_2(x)$ och $R_3(x)$, som alltså måste vara lika. Vi kan nu skriva upp en allmän formel/identitet för cosinus och använder resttermen med udda index.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos t \, dt \, . \tag{4.7}$$

Kapitel 5

Talföljd och serie

5.1 Talföljd och serie, inledande exempel

Vi har redan behandlat serier i samband med Taylorutveckling. Men låt oss börja med följder. En följd är (per definition) en lista

$$(a_k)_{k=1}^{\infty} = (a_1, a_2, ..., a_k, ...)$$

Exempel 5.1

a) $(2k-1)_{k=1}^{\infty}$ är följden av alla udda positiva heltal. Utskrivet är detta

$$(2k-1)_{k=1}^{\infty} = (1,3,5,7,...,2k-1,...).$$

b)

$$(1,4,9,16,25,...) = \left(k^2\right)_{k=1}^{\infty}$$

är följden av alla heltalskvadrater.

c) Oftast har vi följder eller serier, där det finns någon typ av system i följdens element (eller seriens termer). Finns det något system/mönster i följande följd?

$$1,2,3,8,10,12,13,...$$

c) Följden $\left(\dfrac{2n-1}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$ har ett *gränsvärde*. Ett element kan skrivas $a_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{n}$ och vi ser att $a_n \to \dfrac{2}{3}$. Vidare är följden växande; $a_n \leq a_{n+1}, \quad n = 1,2,3,...$. Den är dessutom uppåt begränsad av just $\dfrac{2}{3}$. En följd med dessa två egenskaper har "alltid" ett gränsvärde och är därmed konvergent.

■

Vi visar nu två gränsvärden för två följder.

(i) Om $|x| < 1$, så är $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.
Bevis: Vi logaritmerar $|x|^n$ och får $n\ln|x| < 0$ eftersom $|x| < 1$. Således har vi att $n\ln|x| \to -\infty$, då $n \to \infty$. Nu är

$$-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$$

och både första och sista ledet $\to 0$ då $n \to 0$. Alltså följer det att $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\,.$

Bevis: För fixt x finns sett n_0, sådant att $x < n$ för alla $n \geq n_0$. Därmed är $\frac{x}{n} < 1$ för dessas n. Vi kan skriva

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|x|}{n_0-1}\cdot\frac{|x|}{n_0}\cdot\ldots\cdot\frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|x|}{n_0-1}\cdot\left(\frac{x}{n_0}\right)^{n-n_0+1}$$

och faktorn $\left(\frac{x}{n_0}\right)^{n-n_0+1} \to 0$, då $n \to \infty$ enligt (i).

Exempel 5.2 För den geometriska följden gäller (per definition) att kvoten mellan två konsekutiva element är konstant.

$$a_0 = b, \quad a_1 = bx, \quad a_2 = bx^2, \ldots, a_k = bx^k, \ldots$$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{bx^{k+1}}{bx^k} = x$ för alla $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Detta använder vi längre fram i kvot och rotkriterierna.

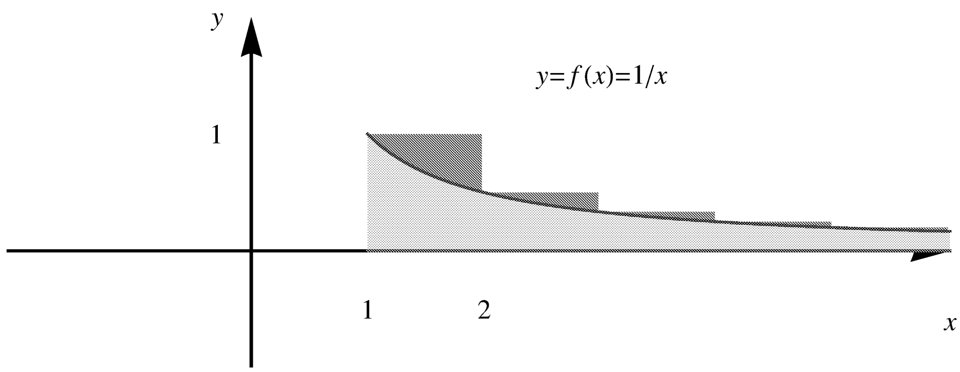
Exempel 5.3

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

kallas den *harmoniska serien*. En series summa skall upppfattas som ett (eventuellt) gränsvärde, i detta fall

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Vi skall argumentera för att denna series summa är ∞, d.v.s. att serien är *divergent*.



Vi ser att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \to \infty$$

då $n \to \infty$. Detta visar att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$, då $n \to \infty$.

■

Kommentarer

- Vi kan se termerna i serien ovan som $a_k = \frac{1}{k} = f(k)$ för funktionen $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$.

- Detta sätt att jämföra en icke-negativ serie (d.v.s. med termer ≥ 0) med en generaliserad integral, kallas integralkriteriet. Mer exakt säger detta kriteriet att om $f(x) \geq 0$ för $x \geq 1$ och $f(x)$ är avtagande, så gäller att

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergent} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergent}. \tag{5.1}$$

- Vi kan p.s.s. jämföra två serier vars element är $a_n \geq b_n \geq 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Om $\sum_{n=1}^\infty b_n$ divergerar, så divergerar serien mot ∞. Och i så fall divergerar också $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (också mot ∞).

- Ett nödvändigt villkor för konvergens. Antag att $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent, d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k = A$$

existerar som reellt (entydigt) tal A: Vi oberverar att

$$\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n \to A - A = 0$$

då $n \to \infty$, d.v.s. termen a_n *måste* gå mot 0, då $n \to \infty$. För den harmoniska serien är termerna $a_n = 1/n \to 0$ men serien är ändå divergent.

Exempel 5.4 Integralkriteriet (5.1) ger ex.vis att

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$$

är konvergent. Man kan t.o.m. visa att seriens summa är $\frac{\pi^2}{6}$. Vi skall m.h.a. detta resultat beräkna summan av serierna

$$T := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} \text{ och } U := \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

$$S := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots =$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots =$$

$$T + \frac{1}{4} \cdot S \Longrightarrow T = \frac{3}{4} \cdot S = \frac{\pi^2}{8}.$$

P.s.s. skriver vi om

$$U = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = T - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{12}.$$

■

Integralkriteriet ger att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \text{ är konvergent } \Longleftrightarrow \alpha > 1\,. \tag{5.2}$$

Exempel 5.5 Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, omm $|x| < 1$. För andra x är den divergent.

■

Om $0 \leq a_k \leq b_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent, så verkar det klart att även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

■

Nedan följer ett exempel på hur två serier med *positiva* termer kan *jämföras*, för att visa konvergens.

Exempel 5.6 **Ett jämförelsekriterium:** Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\sqrt{k}}$ har termen $a_k = \frac{1}{2k\sqrt{k}-\sqrt{k}}$. En sådan term har en nämnare som är samma storleksordning som för termen $b_k = \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{3/2}}$. För att visa att dessa två termer är av samma storleksordning, tar vi gränsvärdet av kvoten

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2-1/k} \to \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} < \infty \text{ då } k \to \infty\,.$$

Vi sluter oss till att $0 \leq a_k \leq (1/2+\delta)b_k$, för något $\delta > 0$ och eftersom gränsvärdet är $\frac{1}{2} < \infty$, så är även

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\sqrt{k}} \leq (1/2+\delta)\sum_{k=1}^{\infty} b_k = (1/2+\delta)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < \infty\,.$$

Alltså är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\sqrt{k}}$ konvergent.

■

Vi har tidigare betraktat geometrisk följd och serie. Att den geometriska serien konvergerar är ekvivalent med att kvoten $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{bx^{k+1}}{bx^k} = x$, är till sitt belopp < 1. Detta leder till kvotkriteriet för konvergens för en serie med termer $a_k \geq 0$.

5.1.1 Kvotkriteriet

Kvotkriteriet Om, för en icke-negativ series termer $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \rho$ och $\rho < 1$, så är den konvergent. Detta betyder ju att $a_{k+1} \approx a_k \cdot \rho$ för alla tillräckligt stora k, d.v.s. för $k \geq k_0$ för något k_0.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \approx a_{k_0}\rho^{k-k_0}$$

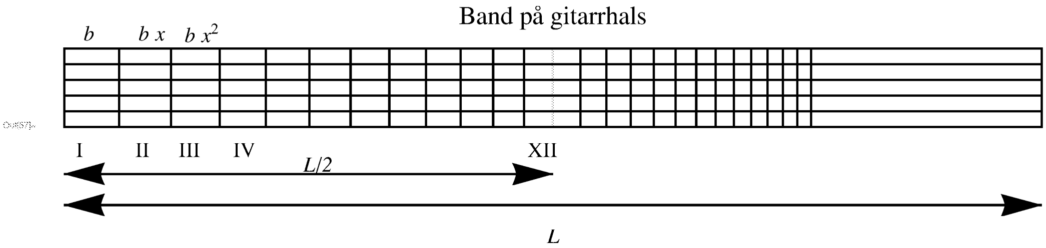
som är en konvergent geometrisk serie. Mer exakt bevisar man konvergensen så här. För tilltäckligt stora k, d.v.s. det finns ett k_0, sådant att för $k \geq k_0$, så är $0 \leq a_k \leq \rho + \varepsilon$, för ett $\varepsilon > 0$ sådant att $\rho + \varepsilon =: x < 1$. Därmed är summan

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} x^k$$

och den högra serien är konvergent.

Rottestet följer längre fram.

Exempel 5.7 Med $a_k = b \cdot x^k$ och $x = 2^{-1/12}$ är serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Summan är $\dfrac{2b}{2 - 2^{11/12}} =: L$ och är längden på gitarrsträngen på en gitarr om bandens bredder är bx^k, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots.$



Med $L = 63.0$ cm blir $b = 3.53592$ cm.

■

Exempel 5.8 Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$.

Lösning: Vi kan jämföra seriens termer a_k med $b_k = \dfrac{1}{k^2}$, som ger en konvergent serie.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k+1}{2k} = 1/2 + 1/(2k) \to 1/2$$

som ger att serien är konvergent. Vi kan t.o.m. räkna ut seriens summa.

$$a_k = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

och

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots - \frac{1}{n+1} = \\ &= 2 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow 2, \text{ då } n \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

En sådan summa/serie kallas teleskopsumma/serie.

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^k$. Denna serie är en geometrisk serie med $|x| = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 1$ och alltså konvergent. Även denna series summa går att beräkna.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{k-1} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{j} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

■

5.1.2 Rotkriteriet

Jämte kvotkriteriet finns *rotkriteriet*. Dessa är tillämpligt på ungefär samma typ av serier. Om vi utgår från den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} ax^k$, så tar vi $k-$roten ur $|b_k| = |ax^k|$. Den är

$$\sqrt[k]{|b_k|} = (|b_k|)^{1/k} = \left(|ax^k|\right)^{1/k} = |a|^{1/k}|x|.$$

Vi låter $k \to \infty$. För att begripa vilket gränsvärde vi får, logaritmerar vi.

$$\frac{1}{k}\cdot\ln|a| + \ln|x| \to 0 + \ln|x|, \text{ d.v.s. } \lim_{k\to}|b_k|^{1/k} = |x|.$$

Vi vet att den geometriska serien är konvergent omm $|x| < 1$.

Serier med teckenalternerande termer

Exempel 5.9 Summan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ har vi tidigare räkna ut. Termerna är $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ och därmed är $|a_k| = \frac{1}{k^2}$. Nu är $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergent, Man säger då att $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ är *absolutkonvergent*. Detta är alltså en definition. Man har därmed inte sagt att denna summa är konvergent. Däremot kan man *bevisa* att en abstolukonvergent serie också är konvergent.

■

Exempel 5.10 Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ är inte absolutkonvergent. Motsvarande serie är nämligen $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ den harmoniska serien, som är divergent. Serien är faktiskt konvergent. Detta följer av nedanstående sats.

■

(**Leibniz kriterium**) Om $a_k, \quad k = 1, 2, \ldots$ är en följd sådan att

(i) a_k och a_{k+1} har olika tecken och

(ii) $|a_k|$ är avtar mot 0, då $k \to \infty$

så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, som är konvergent men inte absolutkonvergent, kallas *betingat* konvergent. En sådan serie har "oändlig positiv och negativ massa". För serien i det sista exemplet menas med detta att

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots=\infty \text{ och } -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\right)=-\infty .$$

Genom omordning av termerna kan seriens summa bli vilket tal som helst (inklusive $\pm\infty$).

5.2 Potensserier

Definition 5.1 En serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \tag{5.3}$$

kallas potensserie.

Kommentarer

- En Tayloserie är en potensserie.
- Vi studerar här främst fallet $x_0 = 0$, d.v.s. serier som motsvarar Maclaurinserier.

Exempel 5.11 Summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(x+1) \text{ för } |x|<1 .$$

För $|x| > 1$ konvergerar inte serien. Vi skall använda kvot- och rotkriterierna för att verifiera detta. Vårt $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ så måste använda $|a_k|$ i ställe för a_k. För rotkriteriet skriver vi

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k}{k+1}\cdot|x| = \frac{1}{1+1/k}\cdot|x| \to |x| =: \rho$$

då $k \to \infty$. Serie när alltså absolutkonvergent för $|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$. För x på "randen", d.v.s. $x = \pm 1$, vet vi inte om konvergens föreligger. Vi säger att konvergensradien är 1.
Av föregående exempel framgår inte klart vad konvergensradie är och hur den bestäms. Därför ett exempel till.

Exempel 5.12

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{x}{2}\right)^k$$

(a) För vilka x är serien konvergent?

(b) Beräkna seriens summa för de x som summan är konvergent.

Lösning:

(a) Vi använder kvotkriteriet. Sätt $a_k = k\left(\frac{x}{2}\right)^k$.

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)|x|}{2k} = \frac{1+1/k}{2}\cdot|x| \to \frac{|x|}{2} =: \rho$$

då $k\to\infty$. Serien konvergerar alltså absolut om $\frac{|x|}{2} < 1$, d.v.s. om $|x| < 2$. VI har att konvergensradien är $R := 2$. Vi vet inte om serien konvergerar för $|x| = 2$ men att den divergerar för $|x| > 2$. Dock med valet $x = \pm 2$ gäller att $a_k \not\to 0$, och alltså divergent.

(b) Beräkna seriens summa för de x som summan är konvergent. Seriens summa kan beräknas, *ty man kan derivera och integrera innanför konvergensradien, d.v.s. för x, sådana att $|x| < 2$.* Vi fixar till summan så att termerna ser ut som derivator av potensfunktioner.

$$f(x) = x\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\cdot kx^{k-1}}_{=:g(x)}, \quad G(x) := \int_0^x 2^{-k}kt^{k-1}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(x/2)^k = \frac{1}{1-x/2} = \frac{2}{2-x}.$$

Alltså är

$$g(x) = \frac{2}{(x-2)^2} \text{ så att } \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{x}{2}\right)^k = x\cdot\frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2x}{(x-2)^2}.$$

om $x < 2$.

Exempel 5.13 Man kan ibland få fram summan av en serie genom att se likheten med en redan känd series summa. Ex.vis serien

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{2k+1} \text{ för } x > 0.$$

Beräkna $f(1/3)$.

Lösning: Den liknar serien

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

som konvergerar mot $\arctan x$ för $|x| < 1$. Vi gör följande omskrivning av den första serien.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^k}{2k+1}$$

För $0 < x < 1$ kan vi skriva serien som

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

som är konvergent för $0 < x < 1$ enligt tidigare resultat. Speiclellt för $x = 1/3$ får vi

$$f(1/3) = \frac{\arctan(1/\sqrt{3})}{1/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Kommentarer

- Den ursprungliga serien konvergerar för (åtminstone) $|x| < 1$.
- Ex.vis är $f(0) = 1$. Det skall stämma även för

$$\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

  Vi kan inte direkt sätta in $x = 0$ i $\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ eftersom vi därmed måste dividera med 0. Istället kan vi beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

  ex.vis geonom att byta $\sqrt{x} = t$. Vi får

$$\lim_{t\to 0_+}\frac{\arctan t}{t} = \lim_{t\to 0_+}\frac{t - t^3/3 + t^5/5 - \ldots}{t}\cdot\frac{1/t}{1/t} = 1\,.$$

- För en potensserie med element $b_k = a_k \cdot x^k$, där a_k inte beror på x, kan man beräkna konvergensradien genom att beräkna ex.vis med rotkriteriet $\lim\limits_{k\to\infty}|a_k|^{1/k} =: \eta$. Nu är

$$|b_k|^{1/k} = |a_k|^{1/k}\cdot|x|\,.$$

  Kriteriet för absolutkonvergens är då $\eta\cdot|x| < 1$, så att vi får

$$|x| < \frac{1}{\eta} =: R$$

  som konvergensradie för potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

  som alltså är absolutkonvergent för $|x| < 1/\eta$ och divergent för $|x| > 1/\eta$.
- Det är inte alltid som gränvärden av typ $\lim\limits_{k\to\infty}|b_k|^{1/k} =: \eta$ existerar. Man kan då ersätta gränsvärdet med $\limsup|b_k|^{1/k}$ ("limes superior").