

Lösningsslag till Tentamen i matematik TMV 138, 20131218, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2 + 16} dx = \frac{1}{16} \int \frac{1}{(x/4)^2 + 1} dx = \frac{4}{16} [\arctan(x/4)]_0^4 = \frac{\pi}{16}$$

(b)

$$\int_0^3 \frac{2}{x^2 + 4x + 3} dx = \left[\ln \left(\frac{x+1}{x+3} \right) \right]_0^3 = \ln 2.$$

(c)

$$\begin{aligned} \int (2x+1)e^{-x/2} dx &= \{PI\} = (2x+1) \cdot (-2)e^{-x/2} + 2 \int 2e^{-x/2} dx = \\ &= (-4x-2-8)e^{-x/2} + C = C - (4x+10)e^{-x/2}. \end{aligned}$$

8p

2. Lös differentialekvationerna...

(a)

$$y' = 2x(y^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2 + 1} = 2x dx \Leftrightarrow \arctan y = x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = \tan(x^2 + C), \quad y(0) = 0 \text{ ger att } 0 = \tan(\pi + C) \text{ så att } C = 0, \text{ exempelvis.}$$

$$y = \tan(x^2).$$

(b)

$$4y''(t) + y(t) = 2e^{t/2}$$

$$y_h = A \cos(t/2) + B \sin(t/2)$$

$$y_p = CE^{t/2} \text{ insatt i DE:n ger } Ce^{t/2}(4/4 + 1) = 2e^{t/2} \Leftrightarrow C = 1. \text{ Svar } y = A \cos(t/2) + B \sin(t/2) + e^{t/2}.$$

(c)

$$ty'(t) - 2y(t) = 2t^3 \cos t \Leftrightarrow y' - \frac{2}{t}y = 2t^2 \cos t, \text{ IF} = e^{2-\ln t} = t^{-2} \Rightarrow$$

$$(y \cdot t^{-2})' = 2 \cos t \Leftrightarrow y \cdot t^{-2} = 2(\sin t + C) \Leftrightarrow y = 2t^2(\sin t + C).$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = 2\pi^2(\cdot 0 + C) \Leftrightarrow C = 0. \text{ Svar: } y = 2t^2 \sin t.$$

3. Givet funktionen $h(x) := (e^{2x} - 1) \ln(x^2 + 1)$.

(a)

$$h(x) = (e^{2x} - 1) \ln(x^2 + 1) = (1 + 2x + 2x^2 - 1...)(x^2 - x^4/2 + ...) = 2x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = 2.$$

6p

4. (a) $0 \leq \frac{1}{k^2 + 4k + 3} \leq \frac{1}{k^2}$ och alltså är serien konvergent. Enligt uppgift 1(b) är $\frac{1}{k^2 + 4k + 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$, så att en partialsumma är

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \rightarrow \frac{3}{4}, \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

$$(b) \text{ Sätt } a_k = \frac{k+1}{k^{3/2}} \text{ och } b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}. \text{ Då är } a_k \geq b_k > 0 \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}} \text{ divergent. Svar}$$

(b). Serien är divergent.

5p

5. (a) Beräkna volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring y -axeln...

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right]_0^{\sqrt{2}} = \pi.$$

(b) Kurvan $y = 1 - \frac{x^2}{2}$, där $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, roterar kring y -axeln och genererar en yta. Ytans area är

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{1+x^2} dx = \frac{2\pi}{3} (1+x^2)_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3} - 1).$$

6p

6. (a) Ge en formel för partiell integration av produkten $f(x) \cdot g(x)$...Ex.vis för obestämd integral:

$$\int f(x) g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x) g'(x) dx$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

(b) Lämpiga villkor på $f(x)$ är att $f(x)$ är kontinuerlig och på $g(x)$ är att $g'(x)$ är kontinuerlig. 5p

7. Beräkna integralen...

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} &= \left\{ \begin{array}{ll} 1+e^x = t \Leftrightarrow x = \ln(t-1) & \Rightarrow dx = \frac{dt}{t-1} \\ x - \text{gränser} & 0, \quad \infty \\ t - \text{gränser} & 2, \quad \infty \end{array} \right\} = \\ &= \int_2^\infty \frac{dt}{t(t-1)} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{2} \int_2^\infty \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{b-1}{b} \right) - \ln \left(\frac{2-1}{2} \right) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(1 - 1/b) + \ln 2] \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

5p

8. Givet serien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(2x)^{k-1} \dots$

(a)

$$\left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \frac{k 2^{k-1}}{(k+1)2^k} = \frac{1}{1+1/k} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} =: R \text{ då } k \rightarrow \infty.$$

Alltså absolutkonvergent för $x : |x| < 1/2$ och divergent för $|x| > 1/2$. För $x = \pm 1/2$ får vi termer $k(\pm 1)^{k-1} \not\rightarrow 0$. Alltså divergent.

(b) Seriens summa: En primitiv funktion till $f(x)$ är

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1-2x}, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

så att

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}.$$

7p