

Lösningssförslag till tentamen i matematik TMV 138, 20150413, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \sin x \, dx = 0$ eftersom integranden är produkten av en jämn funktion x^2 och en udda funktion $\sin x$ upphöjt till en udda exponent 3 och således en udda integrand. Dessutom är integrationsintervallet symmetriskt.

(b)

$$\int_0^\infty (3x-1)e^{-3x} \, dx = \{\text{P.I.}\} = [(3x-1) \cdot (-1/3)e^{-3x}]_0^\infty + \frac{1}{3} \int_0^\infty 3e^{-3x} \, dx = [()e^{-3x}]$$

(c)

$$\int_0^e \ln x \, dx = \{\text{var. subst. } \ln x = t, x = e^t, dx = e^t dt\} = \int_{-\infty}^1 t e^t \, dt = [(t-1)e^t]_{-\infty}^1 = 0.$$

9p

2. Lös differentialekvationerna...

(a)

$$x y'(x) + y(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int \frac{dy}{y^2} \Leftrightarrow \ln x + C = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{C + \ln x}.$$

Randvillkoret $y(1) = -1$ ger

$$-1 = \frac{1}{C + \ln 1} = \frac{1}{C} \Leftrightarrow C = -1 \text{ så att } y = \frac{1}{\ln x - 1}.$$

(b)

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}.$$

$$y_h : \text{Karak. ekv } r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 2 \end{cases}, \text{ så att } y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

y_p : Vi ser att HL ingår som term i y_h , så att vi ansätter $y_p = y = A t e^{2t}$, som ger

$$y'' - 3y' + 2y = ((4A + 4At) - 3(A + 2At) + 2At)e^{2t} = Ae^{2t} = \underbrace{e^{2t}}_{\text{HL}} \Leftrightarrow A = 1.$$

Således är $y_p = t e^{2t}$ och $y = (t + C_1)e^t + C_2 e^{2t}$.

(c)

$$t y'(t) + y(t) = 2 \ln t \Leftrightarrow y' + \frac{1}{t} y = 2 \frac{\ln t}{t} \text{ med IF} = e^{\ln t} = t.$$

DE:n kan ekvivalent skrivas

$$(t y)' = \frac{2 \ln t}{t} \Leftrightarrow t y = (\ln t)^2 + C$$

Med $y(1) = -2$ får vi $-2 = 0^2 + C$, så att $C = -2$. Svar: $y = (\ln t)^2 - C$.

9p

3. (a) Ange Maclaurinutvecklingen av $h(x) = \ln(x^2 + 1) \cos x$ av ordning 6... Polynomen av tillräckligt hög grad.

$$\begin{cases} \ln(x^2 + 1) : x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \\ \cos x : 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \end{cases}$$

Som ger Maclaurinpolynomet

$$p_6(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + (1/4 + 1/4!)x^6 = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{7}{24}x^6$$

(b) Givet Maclaurinserien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$. Mot vilken funktion konvergerar serien...

$$f(x) = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = e^{2x} - 1 \text{ och } f(1) = e^2 - 1.$$

(c) Beräkna summan av serien $S...$

Lösning: En geometrisk serie med $|x| = |2/\pi| < 1$ och alltså konvergent.

$$s = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k = -1 + \frac{1}{1 - 2/\pi} = \dots = \frac{2}{\pi - 2}$$

7p

4. Givet ytan som begränsas av $y = \sqrt{1 - x^2}$ och x -axeln, där $0 \leq x \leq 1$. Beräkna volymen av den kropp som bildas då ytan roterar kring

(a) x -axeln:

$$V_x = \int_0^1 \pi(1 - x^2) dx = \frac{2\pi}{3}$$

(b) y -axeln:

$$V_y = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{2\pi}{3}$$

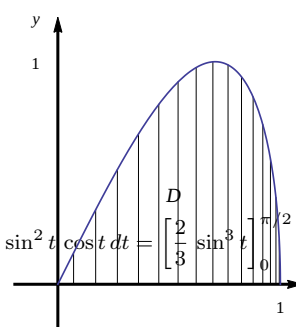
(c) Rotationskropparna i (a) och (b) är båda två halvklot med radie 1.

7p

5.

Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 2t)$ i första kvadranten, se figur.
Beräkna arean av den yta D som kurvan tillsammans med x -axeln begränsar i första kvadranten...

$$\int_{x=0}^1 \sin 2t (-\sin t) dt = \int_{\pi/2}^0 \sin 2t (-\sin t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt = \left[\frac{2}{3} \sin^3 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$



Figur till uppgiften

6p

6. För vilka reella tal α är integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ konvergent respektive divergent? Bevis: Antag först att $\alpha \neq 1$.

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}).$$

Nu är $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-\alpha} = 0$, om $\alpha > 1$ och $b^{1-\alpha} \rightarrow \infty$, om $\alpha < 1$. Slutligen, för $\alpha = 1$ är integralen

$$\int_1^b \frac{1}{x^1} dx = \ln b \rightarrow \infty, \text{ då } b \rightarrow \infty$$

Dett visar att integralen är konvergent om $\alpha > 1$.

5p

7. Betrakta integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^\alpha+1}} dx$.

- (a) Konvergens: För $\alpha = 0$ är integralen divergent och således för mindre α . För $\alpha > 0$ kan vi uppskatta integranden

$$\frac{1}{x\sqrt{x^\alpha+1}} \geq \frac{1}{x} \cdot x^{-\alpha/2} = \frac{1}{x^{1+\alpha/2}} \text{ och } 1 + \alpha/2 > 1.$$

Integralen är alltså konvergent för $\alpha > 0$

- (b) Beräkna integralen...

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^\alpha+1}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^\alpha+1} = t, x = (t^2-1)^{1/\alpha} \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{\alpha} (t^2-1)^{1/\alpha-1} 2t dt \\ x - \text{gränser: } 1 \leq x < \infty \\ t - \text{gränser: } \sqrt{2} \leq t < \infty \end{array} \right\}$$

Integralen blir

$$\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{\alpha (t^2-1)^{1/\alpha}} (t^2-1)^{1/\alpha-1} 2t dt =$$

$$\frac{2}{\alpha} \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{t^2-1} dt = \{PBU\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^b = \frac{1}{\alpha} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1-1/b}{1+1/b} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right] =$$

$$0 + \frac{2}{\alpha} \ln(\sqrt{2}+1) \text{ (svar)}$$

7p