

**Lösningsslag till tentamen i matematik TMV 138/TMV 181, 20150817, f.m.**

1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^3 x \, dx = 0$$

ty  $\tan^3 x$  är en udda funktion i det symmetriska intervallet  $[-\pi/4, \pi/4]$ .

(b)

$$\int_0^\infty (5x-1)e^{-5x} \, dx = \{\text{P.I.}\} = \lim_{b \rightarrow \infty} [-xe^{-5x}]_0^b = 0.$$

(c)

$$\int_{1/e}^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x = t & \Leftrightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \\ 1/e \leq x \leq e & \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right\} = \int_{-1}^1 \frac{t}{e^t} e^t dt = 0.$$

9p

2. Lös differentialekvationerna...

(a)

$$x y'(x) + y(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y^2} \Leftrightarrow \ln x + C = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{C + \ln x}.$$

$$y(1) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{1}{C + \ln 1} \Leftrightarrow C = -1. \text{ Svar: } y = \frac{1}{\ln x - 1}$$

(b)

$$t y' + y = (t y)' = 1 \Leftrightarrow t y = t + C \Leftrightarrow y = \frac{t + C}{t}.$$

$y(1) = 1$  ger  $C = 0$ , så att  $y = 1$ .

(c)  $y_h$ : Karakt. ekv  $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \pm 2$ , så att  $y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$ .

$y_p$ : Vi ser att HL ingår i  $y_h$ , Sätt  $y_p = y = e^{2t} u$ . Insättning i DE:n

$$y''(t) - 4y(t) = 1e^{2t} (u''(t) + 4u'(t)) = 6e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$u' + 4u = 3e^{2t} + A \Leftrightarrow u = \frac{A}{4} + B e^{-4t} + \frac{e^{2t}}{2}$$

9p

3. (a) Ange Maclaurinpolynomet för  $h(x) = \ln(x^2 + 1) \tan^2 x$  av grad 4...

$$\begin{cases} \ln(x^2 + 1) = x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ (\tan x)^2 = (x + \mathcal{O}(x^3))^2 = x^2 + \mathcal{O}(x^4). \end{cases} \Rightarrow h(x) = x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

Alltså är polynomet  $x^4$ .

(b) Beräkna summan av serien  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k^2 + k - 2} \dots$

$$\sum_{k=2}^n \frac{3}{k^2 + k - 2} = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2} \right) =$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{11}{6} \text{ då } n \rightarrow \infty$$

(c) Summan av den geometriska serien

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 2^k}{e^k} = -\frac{1 - (-2/e)^n}{1 - (-2/e)} \rightarrow -\frac{e}{e+2} \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

9p

4. Givet ytan som begränsas av  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  och  $x$ -axeln, där  $0 \leq x \leq 1$ . Volymen av den kropp som bildas då ytan roterar kring

(a)  $x$ -axeln är

$$V_x = \pi \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

(b) och  $y$ -axeln är

$$V_y = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = 2\pi \left[ \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

6p

5. Givet kurvan  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 2t)$ , se figur.

Arean  $A_0$  av området i första kvadrant:

$$A_0 = \int_{x=0}^1 y \, dx = \int_{t=\pi/2}^0 \sin 2t (-\sin t) \, dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{2}{3} [\sin^3 t]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Områdets area är alltså  $\frac{8}{3}$ .

4p

6. Följande formel för partiell integration är given

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx,$$

där  $F'(x) = f(x)$ .

(a) Lämpliga förutsättningar på de inblandade funktionerna är att  $f$  och  $g'$  är kontinuerliga samt att  $F'(x) = f(x)$ . 1p

(b) Bevis av formeln: Vi deriverar båda led.

$$\text{VL: } \frac{d}{dx} \int f(x)g(x)dx = f(x)g(x).$$

$$\text{HL: } \frac{d}{dx} \left( F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx \right) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x). \quad 5p$$

7. Betrakta integralen  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$ .

(a) Integralen generaliserad eftersom integranden  $\rightarrow \infty$ , då  $x \rightarrow 0_+$ , samt eftersom integrationsintervallet  $[0, \infty)$  är obegränsat. 1p

(b) Beräkna integralen...

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2 \Leftrightarrow x = \ln(t^2 + 1) \Rightarrow \\ dx = \frac{2tdt}{t^2 + 1} \\ 0 < x < \infty \Leftrightarrow 0 < t < \infty \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{2t}{t(t^2 + 1)} dt = 2[\arctan t]_0^\infty = \pi. \quad 6p$$