Lösningsförslag till Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, fredag f.m. 20150102

1. Givet vektorerna $\boldsymbol{a} = (3,5,8)$, $\boldsymbol{b} = (1,2,1)$.

   (a) Vinkeln θ mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{21}{\sqrt{98\cdot 6}} = \frac{21}{7\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \theta = 30^\circ.$$

   (b)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-11, 5, 1)$$

2.0p

2. Givet matriserna $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \end{bmatrix}$ med reella element.

   (a) Endast matrisprodukt $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ är möjlig och är

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{2,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} + a_{2,2}b_{1,2} \end{bmatrix}$$

   (b)

$$\det\boldsymbol{A} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}\,.$$

   (c) Inversmatrisen till $\boldsymbol{A}$ uttryckt med elementen i $\boldsymbol{A}$ är

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

5.0p

3. Antag att $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^3$...

   (a) Förenkla...

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}) - |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} + 2\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 =$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{b}|^2 = 0.$$

   (b) Förenkla...

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{0} = 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,.$$

   (c) Produkten $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0$, eftersom $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

5.0p

4. Antag att matrisen $\boldsymbol{A}$ är kvadratisk och förutsätt att lämpliga matriser i (a) och (b) nedan är inverterbara.

   (a) Lös ut $\boldsymbol{X}$ i matrisekvationen...

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X} \Longleftrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$$

   (b) Visa att...

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}$$

   och den sista likheten är sann för dess VL är

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I} = \text{HL. VSB}$$

4.0p

5. Givet fyra punkter P, Q, R och S i $\mathbb{R}^3$, som inte ligger i samma plan.

(a) Givet två olika punkter P och Q i $\mathbb{R}^3$. En ekvation för linjen genom punkterna är ex.vis $(x, y, z) = t \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OP}, \quad t \in \mathbb{R}$. 2.0p

(b) Arean av triangeln med hörn i P, Q och R, kan beräknas med vektorprodukt eftersom arean av en triangel är $T = \dfrac{p \cdot q \cdot \sin\theta}{2}$, där p och q är två sidors längderoch θ är mellanliggande vinkel. Och desutom är

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}| \sin\theta,$$

där θ är i vinkeln mellan dessa vektorer. Ett uttryck för arean uttryckt med dessa tre punkter är $T = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2}$. 2.0p

(c) De fyra punkterna är hörn i en tetraeder. Tetraederns volym uttryckt i punkterna är

$$V = \frac{|(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}|}{6}.$$

2.0p

6. Antag att $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C}$ är tre matriser med typ $\boldsymbol{A} = 3 \times 4$, typ $\boldsymbol{B} = 3 \times 5$. och typ $\boldsymbol{C} = 5 \times 2$
Ange typen av de matrismultiplikationer är möjliga. 3 p om alla svar är riktiga, 1.5 p om precis tre svar är riktiga.

(a)	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T$	(b)	$\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}$	(c)	$\boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{B}^T$	(d)	$\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$
	Möjlig		möjlig		möjlig		omöjlig
	typ $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T) = 3 \times 3$		typ $(\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}) = 5 \times 4$		typ $(\boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{B}^T) = 2 \times 3$		

3.0p