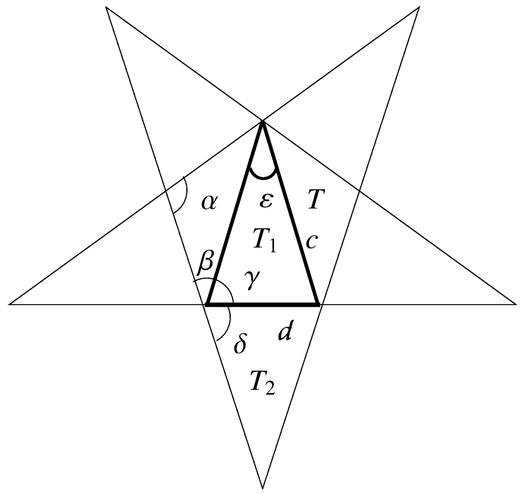
Arean av en julstjärna uttryckt i d



Samband mellan vinklar

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{5-2}{5} \cdot \pi = \frac{3\pi}{5} \\
\beta &= \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{5}\,, \\
\gamma &= \frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{5}\,, \\
\delta &= \pi - \beta - \gamma = \frac{2\pi}{5}\,.
\end{aligned}
$$

därmed är $\gamma = \delta = \frac{2\pi}{5}$. Alltså är trianglarna T_1 och T_2 likformiga. Julstjärnan består av 6 trianglar, kongruenta med T_1, samt två trianglar T i pentagonen som är kongruenta med varandra. Vi låter T eventuellt med olika index, beteckna repektive triangels area. Julstjärnans area är då $6T_1 + 2T =: A$. Toppvinkeln i T_1 betecknar vi med ε, som uppfyller

$$\varepsilon = \pi - 2\gamma = \frac{\pi}{5}\,.$$

Sinussatsen ger att

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\varepsilon}{d} \Leftrightarrow c = d\,\frac{\sin\gamma}{\sin\varepsilon}\,.$$

$$T_1 = \frac{c^2}{2} \cdot \sin\varepsilon = \frac{d^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\varepsilon} \cdot \sin\varepsilon = \frac{d^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\gamma}{\sin\varepsilon}\,.$$

P.s.s. är

$$T = \frac{d^2}{2} \cdot \sin\alpha$$

Arean av julstjärnan är alltså

$$A = 6T_1 + 2T = d^2\left(3\,\frac{\sin^2\gamma}{\sin\varepsilon} + \sin\alpha\right)\,.$$

Nu kan man uttrycka $\sin\alpha$, $\sin\gamma$ och $\sin\varepsilon$ med rötter. Vi börjar med $\sin\varepsilon = \sin\pi/5$. Nu är $2\pi/5$ och $3\pi/5$ supplementvinklar. Alltså är

$$\sin 2\varepsilon = \sin 3\varepsilon\,.$$

Vi utvecklar båda sidor.

$$2\sin\varepsilon\,\cos\varepsilon = 2\sin\varepsilon\,\cos^2\varepsilon + \sin\varepsilon(2\cos^2\varepsilon - 1) \Leftrightarrow$$

$$4\cos^2\varepsilon - 2\cos\varepsilon - 1 = 0 \text{ (Sätt } \cos\varepsilon = t) \;\Leftrightarrow t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} = \cos\varepsilon\,.$$

Det är endast "+", som kan gälla. Vi räknar ut $\sin\varepsilon$ m.h.a. trigonometriska ettan. Detta ger att

$$\sin\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}\,. \tag{1}$$

Då blir

$$\begin{aligned}\sin\gamma &= \sin 2\varepsilon = \sin\alpha = \sin 3\varepsilon = 2\sin\varepsilon\,\cos\varepsilon = \\ &= 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}\,.\end{aligned} \tag{2}$$

M.h.a. (1) och (2) får vi den totala arean

$$A = d^2\left(3\,\frac{\sin^2\gamma}{\sin\varepsilon} + \sin\alpha\right) = \sqrt{\frac{125}{8} + \frac{55\sqrt{5}}{8}} \cdot d^2 \text{ a.e.}$$