1 Numerisk integration, tre metoder

För att approximativt beräkna arean mellan $y = f(x)$, $x-$axeln då $a \leq x \leq b$, så finns det olika numeriska metoder. Vi skall lära oss de tre viktigaste. Den exakta arean skrivs

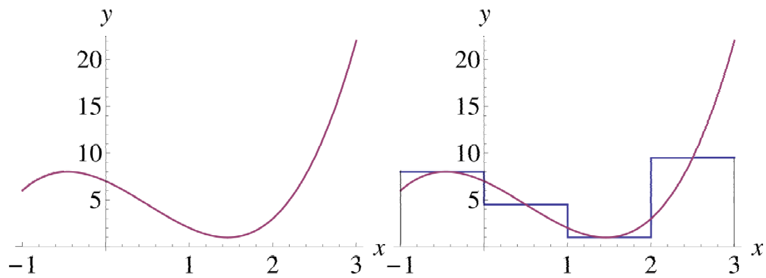
$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

1.1 Rektangelmetoden, eller mittpunktsformeln

I denna metod delar vi in intervallet $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ i n lika långa delintervall, som alltså får längden $\frac{b-a}{n}$. Därefter tar vi och beräknar "höjderna" i respektive delintervalls mittpunkt.

Exempel

I figuren t.v. är grafen $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 7$. Vi ser att $a = -1$ och $b = 3$ och i figuren t.h. har vi $n = 4$ delintervall. Varje delintervall har bredden $\frac{3-(-1)}{4} = 1$.



Arean blir då

$$\int_a^b f(x)dx \approx 1 \cdot (f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5) + f(2.5))$$

Vi kan anta att funktionen är $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 7$. Då blir

$$\int_a^b f(x)dx \approx 1 \cdot (f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5) + f(2.5))) = 23\,.$$

Definition 1.1. *Vi definierar rektangelmetoden för n lika långa delintervall som approximationen*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)) \tag{2}$$

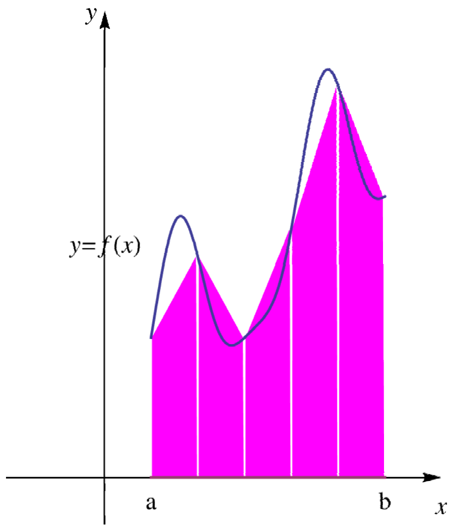
Exempel

Beräkna $\int_0^1 e^x dx$ med Rektangelmetoden eller Mittpunktsformeln och 2 delintervall.

Lösning: Vi sätter $e^x = f(x)$ och $n = 2$, så att $a = x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ och $b = x_2 = 1.0$. Mittpunkter i respektive intervall är $\frac{x_0+x_1}{2} = 0.25$ och $\frac{x_1+x_2}{2} = 0.75$. Därmed är

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = \frac{1-0}{2}(e^{0.25} + e^{0.75}) \approx 2.18.$$

1.2 Sekantmetoden eller Trapetsformeln



Sekantmetoden med 6 delintervall

Exempel Beräkna $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ med Sekantmetoden eller Trapetsformeln och 4 delintervall med samma funktion som tidigare.
Lösning: Vi sätter $n = 4$, så att $a = x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ och $b = x_4 = 3$. Därmed är

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{3} (2x^3 - 3x^2 - 4x + 7)dx \approx$$

$$\frac{3-(-1)}{4}\left(\frac{f(x_0 + f(x_1))}{2} + \frac{f(x_1 + f(x_2))}{2} + \frac{f(x_2 + f(x_3))}{2} + \frac{f(x_3 + f(x_4))}{2}\right) =$$

$$\frac{3-(-1)}{4}\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right) = 26\,.$$

1.3 Simpsons formel

I Simpsons formel approximeras kurvan $y = f(x)$ med parabelsegment. Formeln nedan kan härledas men det är lite komplicerat.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right) \tag{3}$$

där antalet delintervall är $2n$. **Exempel** Vi beräknar för $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 7$ med 4 delintervall, d.v.s. $2n = 4$ så att $n = 2$.

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx \approx \frac{3-(-1)}{6\cdot 2}\cdot\left(f(-1) + 4f(0) + 2f(1) + 4f(2) + f(3)\right) = 24\,.$$

Kommentarer

- Simpsons formel ger det exakta svaret för polynom av grad högst 3.

1.4 Övningar

1. Beräkna $\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$ med 3 delintervall och Rektangelmetoden, 6 delintervall och Sekantmetoden och Simpsons formel. Svar med tre siffror.

2. Beräkna $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ med 2 delintervall och Rektangelmetoden, 4 delintervall och Sekantmetoden och Simpsons formel. Svar med tre siffror.

1.5 Facit

1. 4.51, 4.66 respektive 4.67 .
2. 1.07, 1.12 respektive 1.10 . Det exakta värdet är $\ln 3$.