Vektorrum, underrum, baser

Hittills: vektorer i $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avsn. 2.8–2.9 samt 4.1–4.3

Addera vektorer $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$; addera polynom

Abstrakt def:

$(a_1 + a_2 t) + (b_1 + b_2 t) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)t$

Def. 1 Vektorrum V (över $\mathbb{R}$):

mängd V; elementen $\mathbf{v} \in V$ vektorer;
dessa kan (i) adderas, (ii) multipliceras med skalärer ($\in \mathbb{R}$). För alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ och $a, b \in \mathbb{R}$ gäller:

Det finns en speciell nollvektor $\mathbf{0} \in V$.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
d) ~~$\exists$ nollvektor $\mathbf{0} \in V$:~~ $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
e) ~~$\exists$ vektor $(-\mathbf{u}) \in V$:~~ $\mathbf{u} + \underbrace{(-\mathbf{u})}_{(-1)\mathbf{u}} = \mathbf{0}$
f) $a\mathbf{u} \in V$
g) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
h) $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
i) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
j) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. //

Ex.
(i) $\mathbb{R}^n$ (med vanlig komponentvis addition) är huvudexemplet
(ii) P_n: alla polynom grad $\leq n$, vanlig addition + mult.
dvs $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$
(iii) mängden av alla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(iv) Vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ av formen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ är ej vektorrum.

Obs! Utöver Def. har alla vektorrum V andra egenskaper, tex $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{v} \in V$.

Bevis: $0 \cdot \mathbf{v} = (1-1) \cdot \mathbf{v} \overset{(h)}{=} 1 \cdot \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} \overset{(e)}{=} \mathbf{0}$.

Övn: Visa att $b \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\forall b \in \mathbb{R}$.

→ Varför generalisera?
~~Vissa~~ Egenskaper ~~av~~ hos $\mathbb{R}^n$ gäller i mer allmänna situationer.

Def 2 Låt $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$.
U är ett **underrum** ~~om~~ i V om

(i) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$
(ii) $a \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in U \Rightarrow a\mathbf{v} \in U$.

I ord: U är sluten under addition och mult. med skalärer.

Ex.

(i) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ etc.
underrum i $\mathbb{R}^n$

(ii) P_{n-1} : polynom grad $\leq n-1$
underrum i P_n
$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}$

Obs! (övn.)
(i) Ett underrum U i ett vektorrum V är ett vektorrum.
(ii) $\mathbf{0} \in U$ alltid. //

Kom ihåg: om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ så är **spannet** $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

Sats. 1 $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är ett underrum i V.

Bevis

(i) $(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) + (b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n)$
$= (a_1+b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2+b_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_n+b_n)\mathbf{v}_n$
använder (b), (c), (h) i Def. 1

(ii) $a(b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n) = (ab_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (ab_n)\mathbf{v}_n$
(g) och (i)

/

Def 3. Låt A: $m \times n$ - matris

Nollrummet

$$\mathrm{Nul}(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \qquad m\Big\{ \overbrace{\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}}^{n} \mathbf{x}$$

Sats 2. $\mathrm{Nul}(A)$ är ett delrum i $\mathbb{R}^n$.

Bevis. Först: $\mathrm{Nul}(A) \neq \emptyset$ då $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
(så $\mathbf{0} \in \mathrm{Nul}(A)$ oavsett A.)

(i) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}(A) \Rightarrow A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \underset{(d)}{\overset{\uparrow}{=}} \mathbf{0}$

(ii) $b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}(A) \Rightarrow$

$$A(b\mathbf{u}) = b(A\mathbf{u}) = b\mathbf{0} = \mathbf{0}. //$$

Ex. Bestäm nollrummet till

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Söker alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Steg 1: Radreducera utökade matrisen $[A \ \mathbf{0}]$:

$$[A \ \mathbf{0}] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Steg 2: Inför variabler

Dvs
$$x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0$$

Så
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x_2, x_4, x_5 \ \text{fria} \\ &\text{Skriv} \begin{cases} x_2 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = c \end{cases} \end{aligned}$$

Steg 3: Allmän form på $\mathbf{x} \in \mathrm{Nul}(A)$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b - 3c \\ a \\ -2b + 2c \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dela upp bidragen från a, b, c.

Steg 4: Så $\mathrm{Nul}(A)$ består av alla $\mathbf{x}$ som ovan för $a, b, c \in \mathbb{R}$.

~~Om man ger en~~ Obs! Givet matris A.

(i) Lätt att kolla om given $\mathbf{x}$ tillhör $Nul(A)$:
se om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(ii) Svårt ge exempel på $\mathbf{x} \in Nul(A)$:
måste lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för $\mathbf{x}$. //

Def A $m \times n$, $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n]$

Kolonnrummet

$$Col(A) = \{ x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$
$$= Span\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}.$$
$$= \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ för ngt } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}.$$

$Col(A)$ ~~är~~ underrum i $\mathbb{R}^m$ (Sats 7).

Obs!

(i) Lätt ge exempel på $\mathbf{b} \in Col(A)$:
ta tex $\mathbf{a}_1$ (första kolonnen).

(ii) Svårt se om given $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tillhör $Col(A)$.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Avgör om $\mathbf{b} \in Col(A)$.

Lösn. $\mathbf{b} \in Col(A) \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent.

Radreducera:

$$[A \ \mathbf{b}] \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $x_3 = x$ fri
  $-6x_2 - 18x_3 = 15$
- $x_2 = \frac{15 + 18x}{-6}$
  $x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3$
- $x_1 = 3 + 3x_2 + 4x_3$
  $= 3 + \frac{3}{-6}(15 + 18x) + 4x.$

Konsistent, så ja $\mathbf{b} \in Col(A)$.

(obs: i detta fall är lösningen $\mathbf{x}$ ej unik.)

En av kursens viktigaste def:

Def. Låt $H \subseteq \mathbb{R}^n$ underrum.
En bas för H är en samling vektorer $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ som

(i) är linjärt oberoende

(ii) spänner upp H, dvs $\mathrm{Span}(\mathcal{B}) = H$. //

Poängen:

- $\mathcal{B}$ spänner upp, så varje $\mathbf{v} \in H$ kan skrivas $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_m$ $(*)$
- $\mathcal{B}$ linjärt oberoende så representationen $(*)$ är unik.

Dvs om även $\mathbf{v} = y_1 \mathbf{b}_1 + \dots + y_n \mathbf{b}_m$
så gäller

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_m) - (y_1 \mathbf{b}_1 + \dots + y_m \mathbf{b}_m)$$

$$= (x_1 - y_1)\mathbf{b}_1 + \dots + (x_m - y_m)\mathbf{b}_m .$$

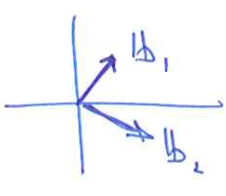
Linjärt oberoende $\Rightarrow$ då gäller $x_i - y_i = 0$, $\forall i$
dvs varje $x_i = y_i$.

Def. Talen $x_1, \dots, x_m$ i $(*)$ kallas koordinaterna för $\mathbf{v}$ i basen $\mathcal{B}$.
Koordinatvektorn

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} . \quad //$$

Ex.
(i) standardbasen för $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Annan bas för $\mathbb{R}^2$:
$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Kolonnrummet $Col(A) = Span(a_1, \dots, a_n)$.
I allmänhet är kolonnerna $a_1, \dots, a_n$ ej linj. ober. så de är ej en bas för $Col(A)$.
Däremot gäller:

Sats 3: Pivotkolonnerna hos A är en bas för $Col(A)$.

Ex.

$$A = (a_1\ a_2\ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Kolonnerna linjärt beroende, då tex

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{icke-trivial lösning.}$$

Reducerad form:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kol 1 och 2 är pivot

Bas

$$= \{a_1, a_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}. //$$

Sats 3 gäller eftersom $A \sim B$ medför att $Ax = 0$ har samma lösningar som $Bx = 0$.
I trappstegsformen är det uppenbart att pivot-kolonner linjärt oberoende, så samma gäller ursprungliga matrisen.