Baser och dimension

Kom ihåg:

- abstrakt vektorrum V
  tex alla funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- A $m \times n$ $A = (a_1 \; \cdots \; a_n)$
  $\mathrm{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$
  $\mathrm{Col}(A) = \cancel{\{x \in \mathbb{R}^m\}}$ $\mathrm{Span}\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$
- Bas $\mathcal{B}$: oberoende och spänner upp.

Def. $T: V \to W$ linjär om

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$ $\forall\, u, v \in V$

(ii) $T(av) = aT(v)$ $\forall\, a \in \mathbb{R}, v \in V$.

Kärnan: $\{v \in V : T(v) = 0\}$

Värdemängden: $\{w \in W : T(v) = w$ för ngt $v \in V\}$

~~Kan~~ Om visa ~~att~~ dessa är ~~delrum~~ underrum i V resp W

obs! Om $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, så ges T av en $m \times n$ - matris A:

$$T(x) = Ax.$$

Kärnan $= \mathrm{Nul}(A)$

Värdemängden $= \mathrm{Col}(A)$. //

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ bas i V

Så varje $v \in V$ kan skrivas

$(*)$ $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ $(x_j \in \mathbb{R})$.

Talen x_j unika.

Koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Obs! Funktionen $T : V \to \mathbb{R}^n$
$T(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

är linjär.

T ex: $\mathbf{u} = x_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + x_n \mathbf{b}_n$
$\mathbf{v} = y_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + y_n \mathbf{b}_n$

Så $T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{b}_n$

Så $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

Antag nu $V = \mathbb{R}^n$, så T ges av en $n \times n$ - matris.

Låt $P_{\mathcal{B}} = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n)$

Så $P_{\mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = x_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + x_n \mathbf{b}_n = \mathbf{v}$ från (*).

Eftersom $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ linj. ob. är $P_{\mathcal{B}}$ inverterbar. Så

$$\boxed{\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= P_{\mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}}$$

Def. $P_{\mathcal{B}} = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n)$ kallas basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Obs! Om $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ så är

$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n$

dvs $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{v}$.

Ex. $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbb{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ i $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Skriv $\mathbb{v}$ i basen $\mathcal{B}$.

$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ så $P_{\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

$$[\mathbb{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbb{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

Övn. Bekräfta att $\mathbb{v} = \frac{3}{2}\mathbb{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbb{b}_2$. //

Sats. Om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_n\}$ så är varje samling av $m > n$ vektorer i V linjärt beroende.

Bevis. Låt $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_m \in V$, $m > n$.

Skriv i basen $\mathcal{B}$:

$$\mathbb{a}_1 = [\mathbb{v}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, \mathbb{a}_m = [\mathbb{v}_m]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n.$$

Detta är $m > n$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ så de är linjärt beroende.
($A\mathbf{x} = \mathbb{0}$ har en fri variabel, dvs en icke-trivial lösning.)

Så $\exists\, c_1, \dots, c_m$ (ej alla $= 0$) med

$$\mathbb{0} = c_1\mathbb{a}_1 + \dots + c_m\mathbb{a}_m \underset{\uparrow \text{ linjäritet}}{=} [c_1\mathbb{v}_1 + \dots + c_m\mathbb{v}_m]_{\mathcal{B}}.$$

Dvs $c_1\mathbb{v}_1 + \dots + c_m\mathbb{v}_m = 0\mathbb{b}_1 + \dots + 0\mathbb{b}_n = \mathbb{0}$

så de är linjärt beroende. //

Följdsats.

Om V har två baser $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_m\}$, så är $m = n$.

Bevis. Antag $m \neq n$. Kan då anta $m > n$. Men då är $\mathcal{C}$ linjärt beroende. Motsägelse. //

Obs! Det är möjligt för ett vektorrum att ej ha en ändlig bas. t ex. $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Def. Om V har en bas av storlek n så kaller vi n för $\dim V$.

Ex.

(i) $\mathbb{R}^n$ har dimension n (standardbasen $\mathcal{E}$ har stl n).

(ii) P_n = polynom grad $\leq n$

dvs $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$.

Funktionerna $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ är en bas så $\dim P_n = n$. //

Sats. Låt $H = \operatorname{Span}\{\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n\}$.

Om det finns $c_1, \ldots, c_{n-1}$ så att

$$\mathbb{a}_n = c_1 \mathbb{a}_1 + \cdots + c_{n-1} \mathbb{a}_{n-1}$$

Så är $H = \operatorname{Span}\{\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_{n-1}\}$.

(Dvs $\mathbb{a}_n$ är överflödig.)

Bevis. Varje $\mathbb{v} \in H$ kan skrivas

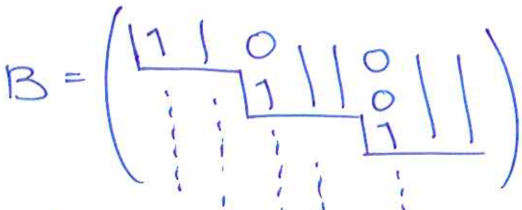
$$\begin{aligned} \mathbb{v} &= x_1 \mathbb{a}_1 + \cdots + x_{n-1}\mathbb{a}_{n-1} + x_n \mathbb{a}_n \\ &= (x_1 + x_n c_1)\mathbb{a}_1 + \cdots + (x_{n-1} + x_n c_{n-1})\mathbb{a}_{n-1} \end{aligned}$$

dvs $\mathbb{v} \in \operatorname{Span}\{\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n\}$.

//

<u>Sats</u>. Matris A.
Pivotkolonnerna är en bas till $\mathrm{Col}(A)$.

<u>Bevis</u>.
Låt B = reducerad trappform av A:



Pivots $p_1 \quad p_2 \cdots p_k$

Icke-pivots $q_1 \quad q_2 \cdots q_\ell$.

Så $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $(*)$.

Om $c_1 \mathbf{a}_{p_1} + \cdots + c_k \mathbf{a}_{p_k} = \mathbf{0}$ så är även $c_1 \mathbf{b}_{p_1} + \cdots + c_k \mathbf{b}_{p_k} = \mathbf{0}$. Men dessa är helt klart linjärt oberoende.
Så alla $c_i = 0$, dvs $\mathbf{a}_{p_1}, \dots, \mathbf{a}_{p_k}$ linj. ob.

Varje $\mathbf{b}_{q_i}$ kan skrivas

$$\mathbf{b}_{q_i} = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{b}_{p_j} \quad \text{dvs} \quad \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{b}_{p_j} - \mathbf{b}_{q_i} = \mathbf{0}$$

Så $(*) \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{a}_{p_j} - \mathbf{a}_{q_i} = \mathbf{0}$.

Enl. föregående sats kan $\mathbf{a}_{q_i}$ tas bort utan att ändra $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$.
Dvs $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_{p_1}, \dots, \mathbf{a}_{p_k}\}$ och dessa är linj. ob. # //.

<u>Def</u> <u>Rangen</u> $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A))$. //

Så rangen = antal pivotkolonner.

För Nul(A) gäller att dimensionen ges av antal icke-pivots.

T ex

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan skrivas i formen

$$\begin{aligned} x_1 &= a_2 x_2 + a_4 x_4 + a_5 x_5 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= b_4 x_4 + b_5 x_5 \\ x_4 &= x_4 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned}$$

dvs $\mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} a_4 \\ 0 \\ b_4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} a_5 \\ 0 \\ b_5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

på formen $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\ell} x_{q_j} \mathbf{v}_j$

där endast $\mathbf{v}_j$ har nollskilt element i pos. q_j.

Härav följer:

Sats (rangsatsen) $A : m \times n$

$$\operatorname{rang}(A) + \dim(\operatorname{Nul}(A)) = n.$$

Sats $A : n \times n$. Följande är alla ekvivalenta med att A är inverterbar:

- kolonnerna är en bas till $\mathbb{R}^n$
- $\operatorname{Col}(A) = \mathbb{R}^n$
- $\dim(\operatorname{Col}(A)) = n$
- $\operatorname{rang}(A) = n$
- $\operatorname{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$
- $\dim(\operatorname{Nul}(A)) = 0.$ //