Repetition

NOLLRUMMET: Låt A ~~bli~~ vara $m \times n$ matris, $Nul(A)$ är mängden av alla lösningar till den homogena ek. $Ax = 0$.

$$Nul(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

KOLONNRUMMET: Låt A ~~bli~~ vara $m \times n$ matris, $Col(A)$ är mängden av alla linjär kombinationer av kolonnerna i A. Om $A = [a_1, \dots, a_n]$ så är

$$Col(A) = \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\} = \{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} = \{b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ för någon vektor } x \in \mathbb{R}^n\}$$

Ex: Om man ska söka (hitta) nollrummet av en matris, då ~~måste~~ man försöker att söka (hitta) baser av en matris.
(Om frågan är: söka nollrummet, vi måste söka baser)

vad är $Nul(A)$ $\quad A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

1) Elementen av $Nul(A) \in \mathbb{R}^5$. Vi söker lösningen till $Ax = 0$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \quad \text{reducerad trappstegsform (RREF)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 = 2r + s - 3t \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s + 2t \\ x_4 = s, \quad x_5 = t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$Nul(A)$ består av alla x som ovan för $r, s, t \in \mathbb{R}$

$Nul(A)$ är underrum spänn med $\{u, v, w\}$

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den är också linjär oberoende, så den är bas till $Nul(A)$.
$Nul(A)$ har dimension 3 och är underrum av $\mathbb{R}^5$ med bas $\{\underset{u}{[\;]}, \underset{v}{[\;]}, \underset{w}{[\;]}\}$

Linjär ek-sys. $Ax=b$ har lösning när b är en vektor i kolonnrummet av A.

Ex. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$Ax=b$ har inte lösning för varje b pga. 4 linjära ek. med 3 okända variabel.

Om $Ax=b$ har lösningen $\Rightarrow$ b måste bli linjär kombination av kolonner av A.

Vi har bara 3 kolonner $\Rightarrow$ kan inte täcka alla 4 dimensioner vektorrummet $\Rightarrow$ visa vektorer b kan inte bli linjär kombination av A kolonner.

Fråga: Vilken "b" är lösningen till $Ax=b$?

~~Välja ... att välja b~~

Kolonner 3 i A är summa av kol 1 + kol 2 $\Rightarrow$ Col(A) är 2D underrummet av $\mathbb{R}^4$.

En mängd av vektorer $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \in V$ kallas LINJÄRT OBEROENDE om ek.: $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_pu_p = 0$ endast har triviala lösning $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$.

Vektorerna kallas LINJÄRT BEROENDE om ek. ovan har icketriviala lösning.

Ex

Om V spänns upp av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V ÄNDLISTDIMENSIONELLT. V:s DIMENSION (dim(V)) är antalet vektorer i en bas för V. Om V endast innehåller nollvektorn $V=\{0\}$ så är $\dim V = 0$. Om V inte spänns upp av en ändlig mängd av vektorer så kallas V oändligtdimensionellt.

Sats 4.5.12 BAS SATSEN

Låt V vara ett p-dimensionellt vektorrum $p \geq 1$. Då är varje linjärt ~~oberoden~~ oberoende mängd bestående av exakt p vektorer automatiskt en bas för V. Varje mängd bestående av exakt p vektorer som spänner upp V är också automatiskt en bas för V.

dim Nul (A) – antalet fria variabler i ek. $Ax=0$

dim Col (A) – antalet pivotkolumner i A

Ex

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

rad reducerad $[A \ 0]$ till trappstegsform $\sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot kolumner

$$\begin{cases} x_1 = 2r + s - 3t \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s + 2t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

Fri variabler: $x_2, x_4, x_5 \Rightarrow \dim Nul(A) = 3$

2 pivotkolumner $\Rightarrow \dim Col(A) = 2$

RANG

Låt A vara $m \times n$-matris. Varje rad i A har n-koordinater och därför kan identifieras med en vektor i $\mathbb{R}^n$. Linjära höljet av alla radvektorer i A kallas RADRUMMET, Row A, för A.

Sats 4.6.13 Om två matriser A och B är radekvivalenta så är Row A = Row B. Om U är en trappstegsform av A så är pivotraderna i U en bas för Row A.

$$\boxed{\dim Row A = \dim Col A}$$

dim Row A kallas RANGEN för A $\Rightarrow$ rank A

Sats 4.6.14 DIMENSIONSSATSEN

Låt A vara $m \times n$-matris. Då $\text{rank} A + \dim Nul A = n$

Bevis rank A = {antalet pivot ~~rader~~ kolumner i A}

+ dim Nul A = {antalet fria variabler i A} = {antalet icke-pivot kolumner}

= {antalet kolumner i A} = n

Sats 2.3.8 (om inverterbara matriser egenskaper). Låt A vara $n \times n$-matris. Då är följande påstående ekvivalenta:

a) A är inverterbar
b) A är radekv. med identitetsmatris I_n
c) A har n pivot positioner
d) Ek. $Ax = 0$ har endast den triviala lösningen
e) A:s kolonner är linjärt oberoende
f) Den linjära avbildningen $x \Rightarrow Ax$ är injektiv (1-1)
g) Ek. $Ax = b$ har minst en lösning för varje $b \in \mathbb{R}^n$
h) A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^n$
i) Den linjära avbildningen $x \Rightarrow Ax$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$.
j) Det finns en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$
k) Det finns en $n \times n$ matris D sådan att $AD = I$
l) A^T är inverterbar
m) Kolonnerna i A bildar en bas i $\mathbb{R}^n$
n) $\mathrm{Col}A = \mathbb{R}^n$
o) $\dim \mathrm{Col}\, A = n$
p) $\mathrm{rank}\, A = n$
q) $\mathrm{Nul}\, A = \{0\}$
r) $\dim \mathrm{Nul}\, A = 0$

s) tal 0 är inte egenvärd av A
t) $\det(A) \neq 0$

Ex1 Linjär beroende (oberoende)

~~Bevisa~~ Vektor $v = (3, 9, -4, -2)$ är linjär kombination av vektorer

$u_1 = (1, -2, 0, 3)$ $u_2 = (2, 3, 0, -1)$, $u_3 = (2, -1, 2, 1)$?

~~[illegible]~~

v är linjär kombination av u_i ! $v = x u_1 + y u_2 + z u_3$

$(3, 9, -4, -2) = x(1, -2, 0, 3) + y(2, 3, 0, -1) + z(2, -1, 2, 1)$

$= (x + 2y + 2z, -2x + 3y - z, 0 + 0 + 2z, 3x - y + z)$

trappsteg form

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + 3y - z = 9 \\ 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 7y + 3z = 15 \\ 2z = -4 \\ -7y - 5z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 7y + 3z = 15 \\ 2z = -4 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 7y + 3z = 15 \\ 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{matrix}$$

Systemet är konsitent (lösbart) och har lösning $\Rightarrow$ v är linjär kombination av u_i: $v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$

Om systemet är inte konsitent (olösbart) har inga lösningar

$\Rightarrow$ vektor v är inte linjär komb. av u_i.

Ex2 Visa att vektorer $u = (6, 2, 3, 4)$, $v = (0, 5, -3, 1)$ och $w = (0, 0, 7, -2)$ är linjär beroende:

skip:

$x u + y v + z w = 0$

$\Rightarrow (0, 0, 0, 0) = x(6, 2, 3, 4) + y(0, 5, -3, 1) + z(0, 0, 7, -2)$

$= (6x, 2x + 5y, 3x - 3y + 7z, 4x + y - 2z)$

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ 2x + 5y = 0 \\ 3x - 3y + 7z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \Rightarrow y = 0 \\ \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$