Repetition:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \iff [a_1, \dots, a_n \mid b]$$

Ekvationssystemet — Matrisform — Vektorform

a_{ij} koeff. — HL högerleds.

Totalmatris $(a_{ij} \mid b_i)$

$a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$

$m = n$ – kvadratiskt

$m < n$ – underbestämt

$m > n$ – överbestämt $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (minsta kvadrat metoden)

$m \times n$ - matris: m - rader, n - kolonner

Homogent sys $\Rightarrow b_i = 0$ $\to$ har alltid triviala lösningen $x = 0$

Inhomogent $\Rightarrow b_i \neq 0$

Har icke-triviala lösningar o.m.m har någon fri variabel.

Har oändligt många lös.

Bundna variabler: variabler som hör ihop med kolonner med pivotelement.

Fria variabler: variabler som hör ihop med kolonner utan pivot el.

- Linjära ek. systemet
  - olösbart sys
    - ingen lösning
  - lösbart sys
    - en lösning (ingen fria variabel)
    - oändligt många lösningar (minst en fri variabel)

Pivotel: ledande tal i en trappstegsform

TRAPPSTEGSFORM och REDUCERAD TRAPPSTEGSFORM

ELEMENTÄRA RADOPERATIONER

LINJÄRT OBEROENDE omm vektorek: $x_1u_1 + \dots + x_pu_p = 0$ endast har triviala lösning.

LINJÄRT BEROENDE omm vektorek: $x_1u_1 + \dots + x_pu_p = 0$ har också en icke-triviala lösningar.

$\Rightarrow$ minst en av vektorerna är en linjär kombination av de övriga.

MATRISER

$m = n$ – kvadratisk matris ($n \times n$ matris, $\mathbb{R}^{n \times n}$)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $(a_{ii} = 1)$, $a_{ij} = 0, i \neq j$ – IDENTITETSMATRIS I, ENHETSMATRIS

TRANSPONATET (A^T): $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$

Om A är $m \times n$ $\Rightarrow$ A^T är $n \times m$ matris

INVERSEN (A^{-1}) och DETERMINANTER $(\det(A))$

$C \cdot A = I$ och $A \cdot C = I$, C inversen till A, $C = A^{-1}$

A är 2×2 matris $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, om $ad - bc \neq 0 = \det(A)$
A är INVERTERBAR

$A^{-1} = \frac{1}{ab - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

kvadratisk matris är invert. omm $\det(A) \neq 0$

Beräkning av A^{-1}, $n > 2$
Överför matrisen $[A|I]$ till reducerad trappstegsform.
Om den är $[I|B]$ så är $B = A^{-1}$.

$\det A = 0$ om A:s kolonner är linjär beroende
$\det A = 0$ om A:s rader är linjär oberoende

Beräkning av $\det A$, $n > 2$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j})$$

$$= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

Nollrummet $Nul(A)$ är mängden av alla lösningar till den homogena ek.sys. $Ax=0$

Kolonnrummet $Col(A)$ är mängden av alla linjär kombinationer av kolonnerna i A.

Bas En mäng av vektorer $\mathcal{B}=\{b_1,..,b_p\}$ i vektorrum H ~~an~~ kallas en bas för H om:

(1) $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd

(2) $H = \text{Span}\{b_1,..,b_p\}$

Dimension av vektorrum V: $\dim V$ - antalet vektorer i en bas för V.

$\dim Nul(A)$ - antalet fria variabler i ek. $Ax=0$

$\dim Col(A)$ - antalet pivotkolonner i A

Raderummet $Row(A)$ - linjära höljet av alla radvektorer (spanný linjära spannet → mängden av alla linjära kombinationer av vektorerna i S ($S=\{v_1,..,v_n\}$ - vektorer i V) $\text{span}\{v_1,...,v_n\}$. underrum i V

$\dim Row(A) = \text{rank } A$

$A = m \times n$ $\quad \text{rank } A + \dim Nul\, A = n$

EGENVÄRDEN och EGENVEKTOR A $n \times n$-matris: $\lambda = 0$ är ett egenvärde till $A \Leftrightarrow \det(A)=0 \Leftrightarrow$ A är inte inverterbar

$(A-\lambda I)x = 0$

λ är egenvärde $\Leftrightarrow$ $(A-\lambda I)x=0$ har en icke-triviala lösning

Om $v_1,..,v_r$ är egenvektorer som motsvarar (distinkta) (skilda) olika egenvärden så är $\{v_1,..,v_r\}$ en linjärt oberoende.

DIAGONALISERING: finns en inverterbar matris P och en diagonal matris D: $A = PDP^{-1}$.

→ matris $n \times n$ är diagonaliserbar o.m.m. matrisen har uppsättning av n linjärt oberoende eg.vek.

linjärt oberoende vektorer till A

P - ~~linjär~~ kolonnerna i P är n linjär oberoende vektorer till A

D - motsvarande egenvärden till A (i samma ordning som egenvektorer i P)

Att diagonalisera matris $A \Rightarrow$ hitta inverterbar matris P och diagonal matris $D \Rightarrow A = PDP^{-1}$.

BASBYTE

$\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$, $\mathcal{C}=\{c_1,\dots,c_n\}$ - baser: $\left(\underset{C\leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \underset{B\leftarrow C}{P}$ och $[c_1 \dots c_n \mid b_1 \dots b_n] \sim [I \ \underset{C\leftarrow B}{P}]$

$[b_1 \dots b_n \mid c_1 \dots c_n] \sim [I \ \underset{B\leftarrow C}{P}]$

LINJÄRA DIFF EKV. och BEGYNNELSEVÄRDEN ex

SKALÄR PRODUKT av vektorer u och v $\Rightarrow u \cdot v \Rightarrow u^T \cdot v = v^T u$

NORM $(\|v\|)$: $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$; ENHETSVEKTOR (NORMERAD VEKTOR): $\|u\| = 1$

AVSTÅND $\operatorname{dist}(u,v)$: $\operatorname{dist}(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots + (u_n-c_n)^2}$

ORTOGONALA vektorer u och v $\Rightarrow u \cdot v = 0$

ORTOGONALA KOMPLEMENT $(W^\perp)$: mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W.

$(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul}(A)$ och $(\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T)$, $\dim W + \dim W^\perp = n$

ORTOGONAL MÄNGD: $S = \{u_1, \dots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$, $u_i u_j = 0$ för alla $i \neq j$

Varje ortogonal mängd i $\mathbb{R}^n$ som inte innehåller nollvektorn är linjärt oberoende.

ON-mängd: en ortogonal mängd där alla el. är enhetsvektorer.

ON-bas: en bas som är en ON mängd (ON-bas är en ortogonal bas)

ORTOGONAL PROJEKTION: $w = \frac{y u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots \frac{y u_p}{\|u_p\|^2} u_p$ och $v = y - w$ $\quad w \in W$, $v = W^\perp$

w - ortogonala projektion av y på W: $w = \text{Proj}_W(y)$

ORTOGONAL MATRIS: $n \times n$ matris $U^{-1} = U^T$ (har ortonormerade kolumner $\Leftrightarrow$ kolumner bildar en ON-bas) $\quad U^T U = U U^T = I$

SYMMETRISK MATRIS: $n \times n$ matris $A^T = A$

A är symmetris matris $\Leftrightarrow$ A har ortonormerade egenvektorer $\Leftrightarrow$ A är ORTOGONAL DIAGONALISERBAR (finns ortogonal matris P och en diagonal matris D) : $A = PDP^{-1} = PDP^{T}$

Alla egenvärden till symmetrisk matris A är reella tal och egenvektorer från olika egenrum är ortogonala.

symmetris — diagonal

KVADRATISKA FORMER : $Q = x^T A x \Leftrightarrow Q = (Py)^T PDP^T (Py) \Leftrightarrow Q = y^T D y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q(y_1, \dots y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

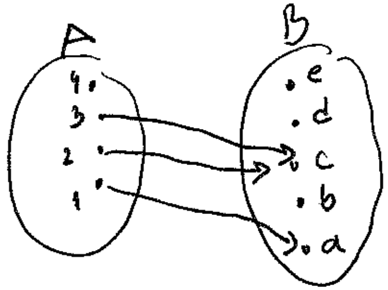
$\lambda_1 \dots \lambda_n$ - egenvärden till A.

MINSTA KVADRAT METODEN : $Ax = b \Leftrightarrow \bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

LU faktorisering - bara exampler

LINJÄRA AVBILDNINGAR

Att funktionen f avbildar x avbildas på y betecknar vi $x \to y$ eller $f(x) = y$. Om $y = f(x)$ säger vi att y är bilden av originalen x. $f : A \to B$



$f : A \to B$

startmängden = $A = \{1, 2, 3, 4\}$

mål mängden = $B = \{a, b, c, d, e\}$
(KODOMÄN)

DOMÄN = $A \{1, 2, 3\}$

RANGE (värdemängd) = $B = \{a, c\}$

$\boxed{\text{VIKTIG}}$ Hela satsen 2.3.8 (Mån 16/2 -repetitus.pdf)