

Del 1: Godkändutdelan

$$1. (a) \begin{cases} x+y+3z+2w=7 \\ 2x-y+4w=8 \\ 3y+6z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 6 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x &= 5 - z - 2w \\ y &= 2 - 2z \\ z &= t \\ w &= s \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - t - 2s \\ 2 - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 (2 + 0 + 4 - 4) + 2 (-12 + 6 + 4) = -4 - 4 = -8$$

$$c) B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [B|I] \sim [I|C] \quad C = B^{-1}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow -R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. a) $P_{B \leftarrow C}$:

$$[b_1 \ b_2 | c_1 \ c_2] \sim [I \ P_{B \leftarrow C}]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -7 & -5 \\ -3 & 4 & | & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -7 & -5 \\ 0 & -2 & | & -12 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 5 & 3 \\ 0 & -2 & | & -12 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 5 & 3 \\ 0 & 1 & | & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$P_{C \leftarrow B} = P_{B \leftarrow C}^{-1} \Leftrightarrow P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 4 - 3 \cdot 6} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

⇓
eller

$$\begin{bmatrix} -7 & -5 & | & 1 & -2 \\ 9 & 7 & | & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \text{rad. reducerant} \quad [c_1 \ c_2 | b_1 \ b_2] \sim [I \ P_{C \leftarrow B}]$$

2b) $y = \beta_1 + \beta_2 x$
 $A(1, 2), B(2, 5), C(3, 5), D(4, 6), E(5, 8)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix}$$

$$X^T \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 87 \end{pmatrix}$$

$$X^T X \beta = X^T \bar{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 87 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \beta_2 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x}$$

2c) Ortogonal komplement ($W^\perp$) är mängden av alla vektorer x i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W .
 $W^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w = 0, \forall w \in W \}$

$$3a) A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \quad \boxed{\lambda_2 = 7}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \boxed{\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda_2 = 7$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$A \text{ är diagonaliserbar!} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{7t} \\ x_2(t) &= 5c_1 e^t - c_2 e^{7t} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -3 \\ 5c_1 - c_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{3} \\ c_2 &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{3} e^t - \frac{11}{3} e^{7t} \\ x_2(t) &= \frac{10}{3} e^t + \frac{11}{3} e^{7t} \end{aligned}}$$

4. a) Reducera A till trappstegform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(de-noll raden av trappstegform $\Rightarrow$ en bas av radrummet av A)

$$\text{Row } A = \left\{ (1, 2, 1, 2), (0, 1, 1, 4/3), (0, 0, 0, 2/3) \right\}$$

Pivot el. i kolumnen 1, 2 och 4

$$\text{Col } A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Nul } A \Rightarrow Ax = 0$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3 \\ x_3 &= x_3 \text{ (fri)} \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Nul } A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Rank}(A) = 3 \quad (A \text{ har 3 pivot el.})$$

$$b) Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -7$$

A har både positiva och negativa egenvärden $\Rightarrow Q$ är ~~ED~~ DEFINIT!

c) En kvadratisk matris kallas symmetrisk om $A^T = A$

En kvadratisk matris kallas ortogonal om $A^T = A^{-1}$
($A^T A = A A^T = I$).

Del 2: Överbetygsdelen

5 a) (F) Om $\lambda = 0$ är egenvärde av $A \Rightarrow$ ~~A är inte invertierbar~~ A är inte invertierbar
(rank $A < n$).

b) (T) $A^2 - 3A + I = 0$

$$I = 3A - A^2$$

$$I = A(3I_n - A) \quad B = 3I_n - A$$

$$I = A \cdot B \Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow A \text{ är invertierbar}$$

c) (T) Om A och B är similerbara matriser $\Rightarrow A = PBP^{-1}$

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= PBP^{-1} - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda P P^{-1} \\ &= PBP^{-1} - P \lambda P^{-1} \\ &= P(B - \lambda I)P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \det(P) \det(B - \lambda I) \det(P^{-1}) = \\ &= \det(B - \lambda I) \end{aligned}$$

Matriser A och B har lika karakteristiska polynom
 $\Rightarrow$ deras egenvärden är lika med samma multiplicitet.

6. a) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b \cdot c = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$
 $= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$

b) $\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \end{array} \right.$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a+d = \text{tr}(A)$$