EGENVÄRDEN och EGENVEKTORER

En EGENVEKTOR till en $n \times n$-matris A är en icke-noll vektor $x \neq 0$ så att $Ax = \lambda \cdot x$, λ är skalär (tal). Ett tal λ kallas EGENVÄRDE ~~om~~ av A om det finns icke trivial lösning x av $Ax = \lambda x$, varje sådant x är en egenvektor till egenvärdet λ.

Ek. $Ax = \lambda x$ kan också skrivas som: $(A - \lambda I)x = 0$

I - Identitets $n \times n$ matris.

$A - \lambda I$ ~~inte~~ är inte inverterbar om vi ska söka icke noll vektor x.

λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)x = 0$ har en icke-triviala lösning.

Det Om λ är ett egenvärde kallas mängden av alla lösningar till $(A - \lambda I)x = 0$ för EGENRUMMET till egenvärdet λ.
$(= \mathrm{Nul}(A - \lambda I))$.

$$\boxed{\begin{aligned} (A-\lambda I)^{-1} \cdot \overbrace{(A-\lambda I) \cdot x}^{=0} &= (A-\lambda I)^{-1} 0 \\ x &= 0 \end{aligned}}$$

$x \neq 0$!!!

~~Vi sett~~ x måste vara icke-noll vektor

KARAKTERISTISK ~~EKVATION~~ EKVATION.

Det. λ är ~~ett~~ egenvärde till $\overset{n \times n \text{ matris}}{A}$ $\underset{\text{o.m.m}}{\Leftrightarrow}$ $\det(A - \lambda I) = 0$

$\det(A - \lambda I) = 0$ kallas karakteristiskek.

λ är ett egenvärde (o.m.m) $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I) \cdot x = 0$ har en icke-trivial lösning $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$

Sats 5.1.2 Om $v_1, \dots, v_r$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till en $n \times n$-matris A så är $\{v_1, \dots, v_r\}$ linjärt oberoende.

Sats 5.2.4 Om A och B är LIKNANDE $n\times n$ matriser ~~[illegible]~~ och om det finns en inverterbar $n\times n$-matris P så att:

$$A = PBP^{-1}$$

så har A och B samma egenvärden.

kolonner som är
P är matris med ~~kolonner~~ n oberoende egenvektor av A
$B = P^{-1}AP$

Bevis

$$\det(A-\lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(P(B-\lambda I)P^{-1}) =$$
$$= \det P \det(B-\lambda I)\det P^{-1}$$

$$\det P \det P^{-1} = \det(PP^{-1}) = \det I = 1$$
$$= \det(B-\lambda I)$$

Ex Beräkna egenvärde och egenvektor av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Tal λ och vektor $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $AX = \lambda X$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 3x + 2y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda-1)x - 2y = 0 \\ -3x + (\lambda-2)y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Homogen ek. systemet har lösning o.m.m $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

λ är egenvärde av A o.m.m $\underline{\lambda = 4}$ eller $\underline{\lambda = -1}$

$\underline{\lambda = 4}$ $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \iff 3x - 2y = 0$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är icke-noll egenvektor tillhör till egenvärd $\lambda = 4$
och alla andra egenvektorer tillhör till $\lambda = 4$ är multiple av v.

$\underline{\lambda = -1}$ $\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0$

$w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är icke-noll egenvektor tillhör till egenvärd $\lambda = -1$

Egenvärde och egenvektor example

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - (-4)(-1) =$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Egenvärde:

$\boxed{\lambda_1 = 3}$ $\boxed{\lambda_2 = -2}$

$\underline{\lambda_1 = 3}$

$$(A - \lambda I)x = 0 \iff (A - 3I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -4 \\ -1 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{matrix} -x_1 - 4x_2 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 = 0 \end{matrix}$$

$x_1 = -4x_2$ $\boxed{x_2 = a} \Rightarrow \boxed{x_1 = -4a}$

Egenvektor är spänn av $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en bas av egenrummet till egenvärd $\lambda = 3$

All eigenvectors corresponding to $\lambda_1 = 3$ are multiples av $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$
(multipler av vektor)

$\underline{\lambda_2 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 2-(-2) & -4 \\ -1 & -1-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{matrix} 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = t} \Rightarrow \boxed{x_2 = t}$ egenvektor är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

④

Def Om A och B är $n \times n$-matriser, då A är LIKNADE B om det finns
(is similar to)
invertebar matris P, så att: $P^{-1}AP = B$, eller $A = PBP^{-1}$.

Sats 5.24. Om $n \times n$ matriser A och B är liknade, då har de sama KARAKTERISTISKAPOLYNOM och sama egenvärden.

REPETITION (2015-02-17)

Ett tal λ kallas EGENVÄRDE av A om det finns icke trivial lösning x av $(A - \lambda I)x = 0$. Varje sådant x är en EGEN VEKTOR till egenvärdet λ.

$\det(A - \lambda I) = 0$ är KARAKTERISTISKEKVATION av A

Om A är $n \times n$ matris, då $\det(A - \lambda I)$ kallas ~~polynom~~ KARAKTERISTISK POLYNOM av A (of degree n)

(*) ~~P är matrisen med kolonne som~~ Kolonner av matris P är n oberoende egenvektorer av A.

Example från måndag $\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right)$

DIAGONALISERING

Def En $n\times n$-matris A sägs vara DIAGONALISERBAR om det finns en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådan att

$$A = PDP^{-1}$$

Sats 5.3.5 En $n\times n$-matris A är diagonaliserbar o.m.m. A har n linjärt oberoende egenvektorer.

$A = PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris o.m.m. kolonnerna i P är n linjär oberoende egenvektorer till A. I så fall är diagonal elementen i D motsvarande egenvärden till A (i samma ordning som egenvektorerna i P).

Ex Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, vi söker inverterbar matris P och diagonal matris $D \Rightarrow A = PDP^{-1}$

Steg 1 Beräkna egenvärde av A

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

Egenvärder: $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$

Steg 2 Beräkna egenvektorer av A (A är 3×3 matris $\Rightarrow$ 3 vektorer)

$$(A-\lambda I)x = 0$$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x_1 = 0}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -x_3$

$-x_1 = 0$

$\boxed{\begin{matrix} x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_3 = 0$

$-x_1 - x_3 = 0$

$x_1 = -x_3$

a) $x_2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_3 = 1$

b) $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Steg 3
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Steg 4
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Steg 5 $AP = PD$ Istället att beräkna P^{-1}, vi kan kolla om $AP = PD$ om P är inverterbar.

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sats 5.3.6 Om $n \times n$-matris A har "n" olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

Sats 5.3.7 Låt A vara $n \times n$ matris med p $(p \leq n)$ olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

a) Dimensionen av egenrummet till egenvärdet λ_k, $1 \leq k \leq p$ är mindre eller lika med ordningen av λ_k som nollställe till det karakteristiska polynomet.

b) A är diagonaliserbar o.m.m. för varje λ_k är dimensionen av egenrummet till λ_k lika med ordningen av λ_k som nollställe till det karakteristiska polynomet.

c) Om A är diagonaliserbar och B_k är en bas för egenrummet till λ_k blir $B_1, \dots, B_p$ en egenvektorsbas i $\mathbb{R}^n$.

REPETITION

Två matriser A och B säges vara SIMILÄRT ekvivalenta (similar) om det finns en inverterbar matris P så att $P^{-1}AP=B$ (då är $A=PBP^{-1}$).

Sats 5.3.5 Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Då är A diagonaliserbar o.m.m det extisterar n linjärt oberoende egenvektorer till A.

$A=PDP^{-1}$ med D diagonal omm kolonnerna i P består av de n oberoende egenvektorerna och då består d_{jj} av egenvärdet till motsvarande egenvektor P_j i kolonn j i P.

Sats 5.3.6. Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så är den diagonaliserbar om den har n distinkta egenvärden.

Sats 5.3.7 Om egenvärdena ej är distinkta

Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ med p distinkta egenvärden $\lambda_1 \ldots \lambda_p$

a) För $k=1,\ldots,p$ så är egenrummet till λ_k mindre eller lika med multiplicititeten för λ_k.

b) A är diagonalisebar omm summan av dimensionen på egenrummen för de olika egenvärdena är n. Detta händer omm:
  1) Den karakteristiska ekv. har n linjära faktorer
  2) Dimensionen av λ_k:s egenrum är lika med λ_k:s multiplicitet

c) Om A är diagonaliserbar och $\mathcal{B}_k$ är en bas för egenrummet till λ_k så är $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ en egenbas för $\mathbb{R}^n$.

BASBYTEN

n-dimensionellt linjärt rum V

Baser i ett n-dimensionellt linjärt rum V

- Antag att vi har två olika baser $\mathcal{B}=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ och $\mathcal{C}=\{c_1, \ldots, c_n\}$ till ett linjärt rum V.
- Om $x \in V$ så kan vi definiera koordinattransformationerna med avseende på de båda baserna $x \rightarrow [x]_\mathcal{B}$ och $x \Rightarrow [x]_\mathcal{C}$

Fråga: Hur relaterar vi de olika basvektorerna till varandra?

Svar: Vi vill hitta en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ så att

$$T([x]_\mathcal{B}) = [x]_\mathcal{C} \text{ för alla } x \in V$$

Sats 4.7.15 (Basbyte)

Låt $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ och $\mathcal{C}=\{c_1,\dots,c_n\}$ vara baser för ett linjärt rum V.

Då existerar en unik matris $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ så att: $[x]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}$

Denna matrisen ges av: $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \left[[b_1]_{\mathcal{C}}\ [b_2]_{\mathcal{C}} \cdots [b_n]_{\mathcal{C}}\right]$,

dvs. kolonnerna i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ ges av basvektorerna b_i i $\mathcal{C}$-koordinater.

Det gäller naturligtvis att $\left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$

Basbyte i $\mathbb{R}^n$

Om $V=\mathbb{R}^n$ så gäller att: $[c_1 \cdots c_n \mid b_1 \cdots b_n] \sim [I \ \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}]$ och

$[b_1 \cdots b_n \mid c_1 \cdots c_n] \sim [I \ \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}]$

Ex

Låt $b_1=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$, $b_2=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$, $c_1=\begin{bmatrix}-7\\9\end{bmatrix}$, $c_2=\begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix}$ och $\mathcal{B}=\{b_1,b_2\}$ och $\mathcal{C}=\{c_1,c_2\}$

är baser i $\mathbb{R}^2$. Vi söker $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ och $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$: radreducerar följande matris:

$$[b_1\ b_2 \mid c_1\ c_2] = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & -7 & -5\\ -3 & 4 & 9 & 7\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & -7 & -5\\ 0 & -2 & -12 & -8\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 5 & 3\\ 0 & -2 & -12 & -8\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 6 & 4\end{array}\right]$$

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix}5 & 3\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}^{-1} \iff \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix}5 & 3\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5\cdot 4-3\cdot 6}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -6 & 5\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -6 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3/2\\ -3 & 5/2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix}2 & -3/2\\ -3 & 5/2\end{bmatrix}$$

Examples

① Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, är vektorer $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \text{Nul } A$.

Svar: $\text{Nul } A = \{ x : x \in \mathbb{R}^n \text{ och } Ax = 0 \}$

$$A \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2+0 \\ 4+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad v_1 \notin \text{Nul } A$$

$$A \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 \\ 4-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 \in \text{Nul } A$$

② Är vektorer $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ bas av $\mathbb{R}^3$?

Svar

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{radreducerad}} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{3} & -4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}}_{\text{trappsteg form}}$$

3 pivotelementen $\Rightarrow$ matris är inverterbar $\Rightarrow$ vektorer är bas av $\mathbb{R}^3$

③ Bas av ~~Row~~ radrum, kolonnrum och Nul rum, Rank A
Row A, Col A, Nul A

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Steg 1 Reducera A till trappsteg form:

$$A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sats $\Rightarrow$ Om B är i trappsteg form icke noll ~~kolonner~~ rader av B formar en bas av radrummet av A (och B också)

Första 3 rader är bas av Row A

$$\text{Row } A = \{ (1, 3, -5, 1, 5), (0, 1, -2, 2, -7), (0, 0, 0, -4, 20) \}$$

Steg 2 Pivot el. av B är i kolonner 1, 2 och 4 $\Rightarrow$

$$\text{Col } A = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right.$$

Steg 3 Nul $A \Rightarrow Ax = 0$,

Vi ska reducera A till reducerad trappstegform

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -x_3 - x_5$

$x_2 = 2x_3 - 3x_5$

$x_3 =$ fria

$x_4 = 5x_5$

$x_5 =$ fria

$$Bx = 0 \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_5 \\ 2x_3 - 3x_5 \\ x_3 \\ 5x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Steg 5 rank A = dim Col A = dim Row A =
= # of pivots of A

rank $A = 3$

(4) $A^{-1} = ?$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}$

Radreducerad matris $[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & -1/3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & 1/21 & -1/7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 & 5/21 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & 1/21 & -1/7 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 15/7 & -10/21 & -4/7 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 & 5/21 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & 1/21 & -1/7 \end{array}\right]$$

A^{-1}

Ex 5 Varför är A diagonaliserbar?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedan A har 3 egenvärder $\lambda_1 =$, $\lambda_2 =$, $\lambda_3 =$
och egenvektrer som motsvarar egenvärder är linjär oberoende, A
har 3 linjär oberoende egenvektrer och är därför diagonaliserbar.

Ex 6

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ är inte diagonaliserbar. Visa!

Steg 1

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & -8 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda-6 & -3 & 8 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix} =$$

andra rad:

$$= -0 \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} + (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda-6 & 8 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \lambda-6 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+2)\big((\lambda-6)(\lambda+3) - 8(-1)\big) =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda - 10)$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-5)$$

$$= (\lambda+2)^2(\lambda-5)$$

Egenvärder: $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 5$

Steg 2 $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} -8 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 & & -x_3 = 0 \\ & x_2 & = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = x_3 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 & & -8x_3 = 0 \\ & x_2 & = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 8x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \quad x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 8 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det finns bara 2 linjär oberoende egenvektorer av A, men bas av $\mathbb{R}^3$ måste ha 3 vektorer $\Rightarrow$ det finns inte egenbas av A $\Rightarrow$ A är inte diagonaliserbar.

(7) Hitta en ekv. som gäller h och k sådan att följande matris motsvarar an lösbart (konsistent) systemet av linjära ekv.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & h \\ 1 & 0 & 6 & k \end{array}\right]$$

Svar Rad reducerad:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & h \\ 1 & 0 & 6 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & h-4 \\ 0 & -1 & 4 & k-2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & h-4 \\ 0 & 0 & 0 & k-2+(h-4) \end{array}\right]$$

Lösbart systemet $\Rightarrow$ $k-2+(h-4)=0$

$\Leftrightarrow$ $k-2+h-4=0$

$\Leftrightarrow$ $k+h-6=0$

(8) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ det A = ?

rad 2 pga 0

$$\det A = -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(4+2) - 2(4-6) = 2+4 = 6$$

(9) Volym av parallellapiped ~~form~~ bildad av vektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Svar Hitta determinat av matrisen med kolumner v_1, v_2, v_3

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5 - 3 = 2$$