

LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONEN

Vi analyserar systemet som är AUTONOMT och LINJÄRT, dvs
 $f(t, x) = f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
 = variabel är t

I många tillämpade problem vi ser hur systemet utvecklas (förändras) i tid. Vi kan beskriva dessa förändringar med system av diffeq.:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}, \quad \begin{array}{l} x_1 \dots x_n \text{ differentierbara funktioner av } t \\ x_1' \dots x_n' \text{ derivater} \\ a_{ij} - \text{reella konstanter} \end{array}$$

~~Viktigaste~~ Viktigaste: Systemet är LINJÄRT! [⊛]

Systemet är ekvivalent med den följande matris ~~ekv~~ diff-ekv.

$$x'(t) = A \cdot x(t) \quad (1)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

⊛ Ex. (1) är linjär, sedan både differentierbara funktion och vektor multiplikation med matris är linjär avbildningar.

Om u och v är två lösningar av $x'(t) = Ax$, då är $c_1u + c_2v$ också en lösning: $(c_1u + c_2v)' = c_1u' + c_2v' = c_1Au + c_2Av = A(c_1u + c_2v)$

Lösningarna u och v är inte unika, men om man fixerar BEGYNNELSVÄRDEN $x(0) = x_0$, då finns en entydig lösning. (initial value)

OKOPPLADE EKVATIONER

Om A är diagonal, $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$, då blir ekvationerna OKOPPLADE

$$x_1' = \lambda_1 x_1, x_2' = \lambda_2 x_2 \dots x_n' = \lambda_n x_n \text{ och kan lösas:}$$

$$x_1' = \lambda_1 x_1 \Leftrightarrow x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\vdots$$
$$x_n' = \lambda_n x_n \Leftrightarrow x_n = C_n e^{\lambda_n t}, C_n \in \mathbb{R}$$

Vi kan skriva den allmänna lösningen $x(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
och man hittar konstanterna c_i från begynnelsevillkoret $x(0) = x_0$.

Ex

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = -5x_2 \end{cases} \text{ har lösningar } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{-5t} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Om } x_1(0) = 1, x_2(0) = 1 \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

DIAGONALISERING AV DYNAMISKA SYSTEM

Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matris med n linjär oberoende egenvektorer $\Rightarrow A$ är diagonaliserbar.

$$A = PD^{-1}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_n - \text{egenvärdena till } A \\ v_1, \dots, v_n - \text{egenvektorer som utgör} \\ \text{en bas} \end{array}$$

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

$$\text{Betrakta ekv. } x' = Ax \Leftrightarrow x' = PD^{-1}Px \Rightarrow P^{-1}x' = D^{-1}Px$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(P^{-1}x) = D(P^{-1}x)$$

$$P^{-1}x = y \Rightarrow y'(t) = D y(t) \rightarrow \text{koeficientmatrisen är diagonal}$$

och vi har okopplade ekv.

$$\text{Lösningarna: } y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}, C_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{Således: } x = Py = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow x = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} v_n, C_i \in \mathbb{R}$$

Konstanterna C_i beräknas genom att sätta $x(0) = x_0$.

$$\Leftrightarrow C_1 u_1 + \dots + C_n u_n = x_0$$

u_i ser att C_i är just koordinaterna av x_0 m.a.p basen $\{u_1, \dots, u_n\}$

Exempel: lös diff-ekv. systemet $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1' = 8x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -10x_1 - 7x_2 \end{cases}$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

V_i diagonaliserar matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 5 \\ -10 & -7-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 3}, \boxed{\lambda_2 = -2} \text{ egenvärdena}$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow u_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ egenvektor}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1 \Rightarrow u_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ egenvektor}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(Lösningen är: } \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= C_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} u_2 = \\ &= C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$$

$$x_2(t) = -C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-2t}$$

$$\cancel{x_1(0) = x_2(0) = 1} \quad x_1(0) = x_2(0) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 3e^{3t} - 2e^{-2t}$$

$$x_2(t) = -3e^{3t} + 4e^{-2t}$$

Exempel 2 Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, bestäm lösningen till $x' = Ax$ som uppfyller $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(3-\lambda-2)(3-\lambda+2) \\ = (1-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Eigenvärden: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$

Motsvarande egenvektorer:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \text{spänns upp av } \begin{cases} v_1 = (1, 0, 1) \\ v_2 = (2, -1, 0) \end{cases} \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 5 \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \\ \Rightarrow v_3 = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A$ är diagonaliserbar

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Lösningen: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 1 \\ -c_2 - c_3 = 1 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3/2 \\ c_2 = -1/2 \\ c_3 = -1/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2}e^t + 2 \cdot \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t} = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t} \\ x_2 &= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t} \\ x_3 &= \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{5t} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{e^{5t}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t}, \quad x_2(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t}, \quad x_3(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{5t}}$$