

SKALÄR PRODUKT och ORTONORMERADE BASER

u och v är vektorer i $\mathbb{R}^n$, u och v är $n \times 1$ matriser.

u^T är $1 \times n$ matris, och produkt $u^T \cdot v$ är 1×1 matris = skalär.

$u^T \cdot v$ är SKALÄR PRODUKT av u och v och vi kan skriva också $u \cdot v$.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{skalärprodukt av } u \text{ och } v \text{ är}$$

$$[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Ex $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad u \cdot v = ? \quad v \cdot u = ?$

$$u \cdot v = u^T \cdot v = [2 \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-5)(2) + (-1) \cdot (-3) = -1$$

$$v \cdot u = v^T \cdot u = [3 \ 2 \ -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-1) = -1$$

Sats 6.1.1 Låt u, v, w vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ och c är skalär.
Då gäller:

- (1) $u \cdot v = v \cdot u$
 - (2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
 - (3) $(cu) \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot (c \cdot v)$
 - (4) $u \cdot u \geq 0$ och $u \cdot u = 0$ om och endast om $u = 0$
- $(c_1 u_1 + \dots + c_p u_p) \cdot w = c_1(u_1 \cdot w) + \dots + c_p(u_p \cdot w)$

NORM och AVSTÅND

Norm (längd) av en vektor v är skalärvärdet $\|v\|$ som definieras

$$\text{av: } \|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \|v\|^2 = v \cdot v$$

En ENHETSVETOR eller NORMERAD vektor är en vektor u sådan att $\|u\| = 1$

Som en följd av detta kan vi definiera AVSTÅNDET $\text{dist}(u, v)$ mellan två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ som normen av skillnaden mellan dessa, dvs.:

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Det gäller att $\|cu\| = |c| \|u\|$

$$\|c \cdot u\|^2 = (cu)^T (cu) = c^2 (u^T u) = c^2 \|u\|^2$$

Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ är ORTOGONALA om $u \cdot v = 0$

Begreppet ortogonalitet är en generalisering av vinkelräthet.

Vi kan definiera vinklar i $\mathbb{R}^n$ genom formeln:

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cdot \cos(\alpha), \quad \alpha \in [0, \pi] \text{ är vinkeln mellan } u \text{ och } v$$

om vektorerna är ortogonala $\alpha = 90^\circ (\pi/2) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow u \cdot v = 0$

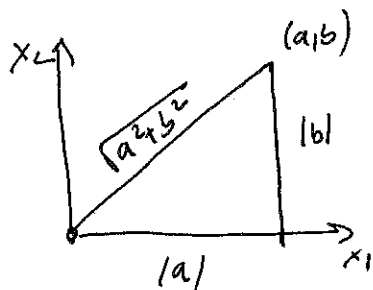
PYTHAGORAS SATS: Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ är ortogonala o.m.m.

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

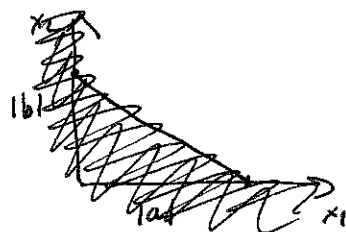
Beris $\|u + v\|^2 = (u + v)(u + v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v$
 $= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$

u och v är ortogonala $\Rightarrow u \cdot v = 0 = 2u \cdot v = 0$

$$\Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$



$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



Ex $\text{dist}(u, v) = ? \quad u = (7, 1), \quad v = (3, 2)$

$$u - v = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{dist}(u - v) = \|u - v\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

ORTOGONALA KOMPLEMENT

Def (Ortogonal komplement)

låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Då betecknar vi med $W^\perp$ det ortogonala komplementet till W , dvs. mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W dvs.

$$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w = 0 \text{ för alla } w \in W\}$$

Viktg: a) $x \in W^\perp$ om och endast om x är ortogonal mot alla vektorer i mängden som spänner upp W

b) $W^\perp$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$

c) $(W^\perp)^\perp = W$

Sats 6.1.3 Låt A vara en $m \times n$ matris. Då gäller:

$$(\text{Row}(A))^\perp = \text{Nul}(A)$$

$$(\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T)$$

⚡ Bra att veta: $\dim W + \dim W^\perp = n$
 $(= \dim \text{Col}(A) + \dim \text{Nul}(A^T) = \text{rank}(A^T) + \dim \text{Nul}(A^T))^\perp$

ORTOGONAL MÄNGD

Def En ~~mängd~~ mängd $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ är en ORTOGONAL MÄNGD om $u_i \cdot u_j = 0$ för alla $i \neq j$.

Sats 6.2.4 Varje ortogonal mängd i $\mathbb{R}^n$ som inte innehåller nollvektorn är linjärt oberoende.

ORTOGONALA BASER

Def. En ortogonal bas B för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortogonal mängd.

Sats 6.2-5 Om $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ är en ortogonal bas för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ så gäller att varje vektor $y \in W$ kan skrivas som:

$$y = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p \quad \text{där} \quad c_j = \frac{y \cdot u_j}{\|u_j\|^2}$$

(om $\|u_j\| = 1 \Rightarrow c_j = y \cdot u_j$)

Ex Beskriva vektor $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ som linjär kombination av vektorer

$$S = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -7/2 \end{bmatrix}$$

$$y \cdot u_1 = 11 \quad y \cdot u_2 = -12 \quad y \cdot u_3 = -33$$

$$u_1 \cdot u_1 = 11 \quad u_2 \cdot u_2 = 6 \quad u_3 \cdot u_3 = 33/2$$

$$y = \left(\frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 + \frac{y \cdot u_3}{u_3 \cdot u_3} u_3$$

$$= \frac{11}{11} u_1 + \frac{-12}{6} u_2 + \frac{-33}{33/2} u_3$$

$$= \underline{u_1 - 2u_2 - 2u_3}$$

ORTONORMALA MÄNGDER och BASER

En enhetsvektor u är en vektor med längden 1, dvs $\|u\| = 1$. En ORTONORMAL MÄNGD (ON-mängd) är en ortogonal mängd där alla element är enhetsvektorer.

En ORTONORMAL BAS (ON-bas) för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortogonal mängd. En ON-bas är alltså en ortogonal bas.

Ex Visa att $\{u_1, u_2, u_3\}$ är ON-bas av $\mathbb{R}^3$. $u_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$
 $u_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$

$$u_1 \cdot u_2 = -3/\sqrt{66} + 2/\sqrt{66} + 1/\sqrt{66} = 0$$

$$u_1 \cdot u_3 = -3/\sqrt{726} - 4/\sqrt{726} + 7/\sqrt{726} = 0$$

$$u_2 \cdot u_3 = 1/\sqrt{396} - 8/\sqrt{396} + 7/\sqrt{396} = 0$$

$\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ är ortogonal mängd (1)

$$u_1 u_1 = 9/11 + 1/11 + 1/11 = 1$$

$$u_2 u_2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1$$

$$u_3 u_3 = 1/66 + 16/66 + 49/66 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 u_1 = 1 \\ u_2 u_2 = 1 \\ u_3 u_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow u_1, u_2, u_3 \text{ är enhetsvektorer (2)}$$

(1) och (2) $\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ är ON-bidugd. $\Rightarrow$ är linjärt oberoende $\Rightarrow$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ form bas i $\mathbb{R}^3$.

Sats 6.2.6 Låt U vara $m \times n$ matris, då är $U^T U = I_n$ om och endast om U 's kolonner är ortonormala.

Sats 6.2.7 Om $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har ortonormala kolonner, och $x, y \in \mathbb{R}^n$ så gäller att:

a) $\|Ux\| = \|x\|$

b) $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$

c) $(Ux)(Uy) = 0$ om och endast $xy = 0$