ORTOGONAL PROJEKTION och ORTOGONALA MATRISER

Repetition:

En mängd $S = \{u_1, u_2, \ldots u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ är en ORTOGONAL MÄNGD om $u_i \cdot u_j = 0$, för alla $i \neq j$

En ORTOGONAL BAS $\mathcal{B}$ för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortogonal mängd.

En ORTONORMAL MÄNGD är en ortogonal mängd där alla element är enhetsvektorer ($\|u\| = 1$).

En ORTONORMAL BAS för ett underrum $W \in \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortonormal mängd.

Sats 6.2.6 Låt U vara $m \times n$-matris, då är $U^T U = I$ o.m.m U:s kolonner är ortonormala.

⊛ se sidan (9)

Sats 6.2.7 Om $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har ortonormala kolonner och $x, y \in \mathbb{R}^n$ så gäller att:

a) $\|Ux\| = \|x\|$

b) $(Ux)(Uy) = x \cdot y$

c) $(Ux)(Uy) = 0$ omm $x \cdot y = 0$

Sats 6.3.8 (Satsen om ortogonal uppdelning)

Låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och låt $y \in \mathbb{R}^n$:

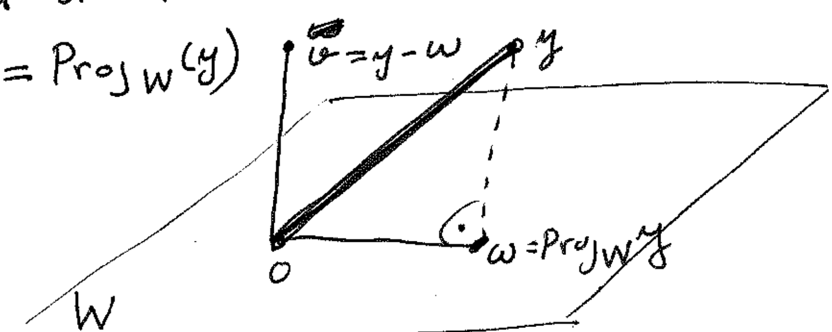
- Det finns en UNIK representation $y = w + v$, $w \in W$ och $v \in W^\perp$.
- Om $\{u_1, \ldots, u_p\}$ är en orthogonal bas för W så gäller att:

$$w = \frac{y \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \ldots + \frac{y u_p}{\|u_p\|^2} \cdot u_p$$

och $v = y - w$.

Vektorn w är den ORTOGONALA PROJEKTIONEN av y på W:

$w = \mathrm{Proj}_W(y)$



Ex Låt $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\{u_1, u_2\}$ är en ortogonal bas för $W = \mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$. Beskriva y som en summa av vektor w i W och en vektor v som är ortogonal ~~...~~ på W.

Ortogonala projektion av y på W:

$$w = \frac{y \cdot u_1}{\underbrace{\|u_1\|^2}_{u_1 \cdot u_1}} \cdot u_1 + \frac{y\, u_2}{\underbrace{\|u_2\|}_{u_2 \cdot u_2}} u_2$$

$$y u_1 = [1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 9$$

$$u_1 u_1 = [2\ 5\ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 30$$

$$y u_2 = [1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$u_2 u_2 = [-2\ 1\ 1] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$$

$$w = \frac{9}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$v = y - w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix} \quad v \text{ är i } W^\perp$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix}$$

Sats 6.3.9 Låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och låt $y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att den ortogonala projektionen w av y på W, $w = \mathrm{Proj}_W(y)$, är den vektor i W som ligger närmast y:

$$\|y - w\| \leq \|y - v\| \text{ för alla vektorer } v \in W.$$

Ex $y = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Beräkna ~~distance~~ avstånd från y till ~~[illegible]~~ $W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$

Svar:

$$w = \frac{y u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{y u_2}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$y u_1 = [-1 \ -5 \ 10] \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 15$$

$$u_1 u_1 = [5 \ -2 \ 1] \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 30$$

$$y u_2 = [-1 \ -5 \ 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -21$$

$$u_2 u_2 = [1 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 6$$

$$w = \frac{15}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-21}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$v = y - w = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\|y - w\|^2 = \|v\|^2 = v \cdot v = [0 \ 3 \ 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 45$$

$$\text{dist}(y, W) = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Note: ~~Distance~~ Avstånd från $y \in \mathbb{R}^n$ till underrum W är ~~distance~~ avstånd från y till den närmaste punkt i W till y.

Sats 6.3.10 Antag att $\{u_1, \dots, u_p\}$ är en ON-bas för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ och att $U = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T$. Då gäller att

$$\text{Proj}_W(y) = UU^T y$$
$$= (y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \dots + (y \cdot u_p)u_p$$

för alla $y \in \mathbb{R}^n$.

Efter satsen 6.26 vi ska definera ORTOGONAL matris:

<u>Def</u> En kvadratisk matris $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas ORTOGONAL om

$$U^{-1} = U^T$$

En $n \times n$ matris är ORTOGONAL omm den har ortonormerade kolumner ($\Leftrightarrow$ kolumner ~~som~~ bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^n$)

GRAM-SCHMIDTS ORTOGONALISERINGSMETOD

<u>Sats 6.4.11</u> (Gram-Schmidt)

Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$. Då har W en ON-bas.
Låt $\{u_1, .., u_p\}$ vara en bas för W. Sätt:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3 v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{u_3 v_2}{v_2 v_2} v_2$$

$$\vdots$$

$$v_p = u_p - \frac{u_p \cdot v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{u_p v_2}{v_2 v_2} v_2 - \dots - \frac{u_p v_{p-1}}{v_{p-1} v_{p-1}} \cdot v_{p-1}$$

Då är $\{v_1, .., v_p\}$ en ortogonal bas för W och

$$\text{Span}\{v_1, .., v_k\} = \text{Span}\{u_1, .., u_k\}, \quad 1 \le k \le p$$

<u>Ex</u> $\underbrace{\{u_1, u_2, u_3\}}_{\text{bas för } W}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Beräkna ortogonal bas av W:

$$v_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \overbrace{\frac{[1\,2\,0\,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}{[1\,2\,3\,0]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}}^{\frac{5}{14}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3 v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$u_3 v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$v_1 v_1 = 14$$

$$u_3 v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix} = 9/14$$

$$v_2 v_2 = \begin{bmatrix} 9/14 & 9/7 & -15/14 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{630}{196}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{9/14}{\frac{630}{196}}^{1/5} \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$