

SYMMETRISKA MATRISER

Def (Symmetrisk matris)

En kvadratisk matris kallas symmetrisk om $A^T = A$

Def (Ortogonal matris)

En kvadratisk matris kallas ortogonal om $A^T = A^{-1}$
dvs om $A^T A = A A^T = I$

Sats 7.1.1 (Sats om ortogonal diagonalisering)

Följande påståenden är ekvivalenta för en $n \times n$ matris A :

- a) A är en symmetrisk matris
- b) A har n ortonormerade egenvektorer
- c) A är ORTOGONAL DIAGONALISERBAR dvs det finns en ortogonal matris P och en diagonal matris D sådana att
$$A = P D P^{-1} = P D P^T$$

Sats 7.1.2 (Sats om egenvärden till symmetriska matriser)

För en symmetrisk matris A gäller följande:

- a) Alla egenvärden till A är reella tal
- b) Egenvektorer från olika egenrum är ortogonala

~~Exempel~~

Ex. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en ortogonal matris som diagonaliserar A .

Vi bestämmer egenvärden, egenvektorer och därefter ortonormerar vektorerna.

Eigenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1/4 = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 = 1/4$$

$$\Rightarrow 1-\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3/2 \quad \lambda_2 = 1/2}$$

Eigenvektorer:

$$\lambda_1 = 3/2 \quad \begin{aligned} -1/2 x_1 + 1/2 x_2 &= 0 \\ 1/2 x_1 - 1/2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1/2 \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 &= 0 \\ \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Är u_1 och u_2 ortogonala?

$$u_1 \cdot u_2 = [1, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad u_1 \text{ och } u_2 \text{ är ortogonala.}$$

Vi normaliserar vektorer och bildar P

$$u_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \quad u_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2$$

$$\|u_1\|^2 = u_1 \cdot u_1 = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \|u_1\| = \sqrt{2}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\|u_2\|^2 = u_2 \cdot u_2 = [1 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \quad \|u_2\| = \sqrt{2}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

En ortogonal matris som diagonaliserar A dvs uppfyller

$$A = PDP^{-1} = PDP^T \quad : \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ex Diagonalisera den symmetriska matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Eigenvärdena:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 7)^2 (\lambda + 2) = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 7 \\ \lambda_3 = -2 \end{array}$$

Egenvektorer

$\lambda_1 = \lambda_2 = 7$ $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u_1 \cdot u_2 = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ inte ortogonala

Ortogonalisera u_1 och u_2 (Gram-Schmidt)

$$z_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$\{z_1, z_2\}$ är ortogonala.

Normera z_1 och z_2 : $\bar{z}_1 = \frac{z_1}{|z_1|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \bar{z}_2 = \frac{z_2}{|z_2|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = -2$ $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, normera u_3 $\bar{u}_3 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} (= \frac{u_3}{|u_3|})$

ON-bas för $\mathbb{R}^3$: $\{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{u}_3\}$ som ger oss matrisen:

$$P = [\bar{z}_1 \ \bar{z}_2 \ \bar{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -4/5 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/5 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/5 \end{bmatrix}$$

och $A = P D P^T$ där $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

KVADRATISKA FORMER

Def. (av en kvadratisk form)

En kvadratisk form är ett uttryck av typ: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$

Några exempel av kvadratiske former:

$$Q_1 = 4x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$$

$$Q_2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$Q_3 = 5xy + y^2$$

MATRISBESKRIVNING AV KVADRATISKA FORMER

En kvadratisk form $Q(x_1, \dots, x_n)$ kan beskrivas på följande sätt: $Q = X^T A X$ där $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ och A är en symmetrisk matris.

Ex

① Låt $Q = ax^2 + bxy + cy^2$

Vi bildar A på följande sätt:

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

då gäller $Q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

② Låt $Q = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$

Vi bildar A på följande sätt.

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$

Vi delar med 2 koefficienterna för blandade termer och skriver de symmetriskt i A .

då gäller $Q = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

DIAGONALISERING AV KVADRATISKA FORMER

Låt Q vara en kvadratisk form och A tillhörande symmetriska matris: $Q = X^T A X$ (1)

Den symmetriska matrisen A kan vi ortogonal diagonalisera. Låt P vara den ortogonala matrisen (som består av matrisesens ortonormerade egenvektorer) som diagonaliserar A .

$$\text{Då gäller: } A = P D P^{-1}$$

Eftersom P är en ortogonal matris gäller det $P^{-1} = P^T$ och därför $A = P D P^T$ (2)

Om vi samtidigt betraktar basbyte från standardbasen till basen som består av de ortonormerade egenvektorer (kolonner i P) då har vi följande samband:

$$X = P Y \quad (3)$$

mellan gamla koordinater $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ och nya koordinater

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Om vi nu substituerar (2) och (3) i (1) får vi:

$$Q = (P Y)^T P D P^T (P Y)$$

$$\Leftrightarrow Q = Y^T P^T P D P^T P Y \Rightarrow (\text{eftersom } P^T P = I)$$

$$\Leftrightarrow Q = Y^T D Y$$

$$Q = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (4)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är egenvärden till matrisen A .

Alltså, med hjälp av substitutionen $X = PY$ och nya variabler $y_1, y_2, \dots, y_n$ har vi skrivit om Q så att blandade term har försvunnit och endast rena kvadratiske termer kan finnas kvar i uttrycket.
När Q skrivs som i (4), säger vi att vi har DIAGONALISERAT den kvadratiske formen Q genom substitutionen $X = PY$.

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

Vi diagonaliserar A och konstruerar en ON-bas av egenvektorer.

Egenvärden är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -7$ och motsvarande egenvektorer är $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$u_1 = \frac{1}{|u_1|} \cdot u_1 \quad u_2 = \frac{1}{|u_2|} u_2$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ som är automatiskt ortogonala.}$$

$\{u_1, u_2\}$ är en ON-bas i $\mathbb{R}^2$ och $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ortogonal.

Vi har $A = PDP^T \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

$$\bar{x} = P\bar{y} \Rightarrow Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} = \bar{y}^T D \bar{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$Q(\bar{x}) = 3y_1^2 - 7y_2^2$$

Def En kvadratisk form kallas POSITIVT DEFINIT om

$$Q(\bar{x}) > 0, \quad \forall \bar{x} \neq 0$$

Den är negativt definit om $Q(\bar{x}) < 0, \quad \forall \bar{x} \neq 0$

Den är EJ DEFINIT om Q har både positiva och negativa värden.

Sats 7.2.5

- 1) $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ är positivt definit om alla λ_i är positiva
- (2) Q är negativt definit om alla λ_i är negativa
- (3) Q är ej definit om A har både positiva och negativa egenvärden.

Ex. Visa att $Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$ är ej definit.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-5-\lambda) - (-4)(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -7 \end{cases}$$

A har både positiva och negativa egenvärden $\Rightarrow$
 Q är ej definit.