VEKTOREKVATIONER

Vektorer i $\mathbb{R}^n$ är n-tiplar av reella tal, $(u_1, \ldots, u_n)$, eller skrivna som kolonnmatriser (kolonnvektorer), $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

Vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan uppfattas som punkter eller som geometriska vektorer i planet respektive rummet. Två vektorer är lika om de lika koordinatvis.

Algebraiska operationer:

- addition, subtraktion:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{bmatrix};$$

- multiplikation med skalär:

$$\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix};$$

$$(-1) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Addition, subtraktion av vektorer och multiplikation med skalär sker koordinatvis.

De algebraiska operationerna uppfyller vanliga räkneregler: om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ och c, d är skalärer så gäller:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} & c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) & (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u} \\ \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} & c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u} \\ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0} & 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \end{array}$$

Definition. En **linjärkombination** av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ med vikterna $c_1, \ldots, c_k$ är vektorn y som ges av

$$y = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k.$$

Mängden av alla linjär kombinationer av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ kallas **linjära höljet** av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ eller delmängden av $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Betecknas $Span\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

Låt $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}$ vara givna vektorer i $\mathbb{R}^n$. Betrakta en vektorekvation

$$x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b} \qquad (1)$$

med $x_1, \ldots, x_k$ som obekanta. Så blir (1) ekvivalent med ekvationssystemet vars totalmatris är $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_k | \mathbf{b}]$.

Vi har alltså att $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k$ omm respektive ekavitionsystemet är konsistent (har minst en lösning).

Geometrisk beskrivning: Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. $Span\{\mathbf{v}\} = \{\lambda\mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ =alla punkter på linjen genom origo och punkten $\mathbf{v}$.

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ som inte är multiplar av varandra. $Span\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} =$ planet som innehåller $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{0}$.

Låt A vara $m \times n$ matris (m rader och n kolonner), $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a_n}]$, där kolonnerna i A är vektorer i $\mathbb{R}^m$.

Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Då är produkten $A\mathbf{x}$ linjär kombinationen av kolonnerna i A med vikterna $x_1, \dots, x_n$:

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har alltså samma lösningar som vektorekvationen $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ som i sin tur har samma lösningar som ekvationssystemet vars totalmatris är $[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n|\mathbf{b}]$.

När en mängd av vektorer i $\mathbb{R}^m$ spänner upp $\mathbb{R}^m$?

Sats 1.4.4. Låt A vara $m \times n$ matris. Då är följande utsagor är logiskt ekvivalenta.

1. För varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning;
2. varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är linjär kombination av kolonnerna i A;
3. kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$;
4. A har pivotposition i varje rad;
5. ekvationssystemet med totalmatrisen $[A|\mathbf{b}]$ är konsistent för varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$.

Beräkning av $A\mathbf{x}$:

Sats 5. Om A är en $m \times n$ matris, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ och c är en skalär, så gäller:

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$
$$A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}.$$

Homogena linjära ekvationssystem.

Ekvationssytem av typen

$$x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

där $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är givna kolonnvektorer i $\mathbb{R}^m$, kallas för homogent linjärt ekavionssystem.

Systemet har alltid en lösning $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ (den triviala lösningen).

Det har icke-triviala lösningar om och endast om ekvationen har minst en fri variabel, dvs matrisen $A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$ har minst en icke-pivot kolonn.

Icke-homogena linjära ekvationssystem.

Sats 1.5.6. Antag att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent för ett visst högerled $\mathbf{b}$ och låt $\mathbf{p}$ vara en lösning. Då är ekvationens lösningsmängd alla vektorer på formen $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$, där $\mathbf{v}_h$ är en lösning till respektive homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis. $\mathbf{p}$ är en lösning $\Leftrightarrow A\mathbf{p} = \mathbf{b}$. $\mathbf{w}$ är en annan lösning $\Leftrightarrow A\mathbf{w} = \mathbf{b}$. Då är

$$A(\mathbf{w} - \mathbf{p}) = A\mathbf{w} - A\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

dvs $\mathbf{w} - \mathbf{p}$ är en lösning, $\mathbf{v}_h$, till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi har alltså $\mathbf{w} - \mathbf{p} = \mathbf{v}_h$ och $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$.