

LINJÄRT BEROENDET

Def. Låt $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. De sägs vara **linjärt oberoende** omm vektorekvationen

$$x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_p\mathbf{u}_p = 0$$

endast har trivial lösning.

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ sägs vara **linjärt beroende** omm vektorekvationen

$$x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_p\mathbf{u}_p = 0$$

har också en icke-trivial lösning.

Låt $A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_p]$. Alltså blir $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ linjärt oberoende omm ekvationen $Ax = 0$ endast har trivial lösning.

Sats 1.7.7. En mängd som består av två eller fler vektorer $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ är linjärt beroende omm minst en av vektorerna är en linjärkombination av de övriga.

Sats 1.7.8. Varje mängd $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ av vektorer i $\mathbb{R}^n$, där $p > n$ är linjärt beroende.

Bevis. Låt $A = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_p]$. Då A är $n \times p$ -matris och $Ax = 0$ svarar systemet med n ekvationer och p obekanta. Om $p > n$ så finns det fler variabler än ekvationer och därmed finns fri variabler. Detta ger att $Ax = 0$ har icke-triviala lösningar och att $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ är linjärt beroende.

LINJÄRA AVBILDNINGAR

Def. En **funktion** eller **transformation** eller **avbildning** T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som till varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $T(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^m$. $\mathbb{R}^n$ kallas för definitionsmängd eller domän, $\mathbb{R}^m$ kallas codomän.

T kallas **linjär** om $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ och $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$, för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex.1. a. "Nollavbildningen" $T(\mathbf{u}) = 0$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

b. $T(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, α är en skalär.

c. Rotation i $\mathbb{R}^2$ φ radianer.

d. Låt A vara en $m \times n$ -matris. Så ger varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ en vektor $A\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^m$. Vi har således en avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. T är en linjär avbildning, ty $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ och $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A\mathbf{u}$, då $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sats 1.9.10. Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns en unik matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Om $\mathbf{e}_j$ är den j :te kolonnen i enhetsmatrisen I_n och $\mathbf{a}_j = T(\mathbf{e}_j)$ så är $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$.

Matrisen A kallas för standardmatris för avbildningen T .

Bevis. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ och $T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \dots + x_nT(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = A\mathbf{x}$.

Ex.2. a. Nollavbildningen har matrisen 0.

b. Avbildningen i Ex.1b har standardmatrisen αI_n , där I_n är enhetsmatrisen.

c. För avbildningen i Ex.1c har vi $T(\mathbf{e}_1) = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$ och $T(\mathbf{e}_2) = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$ och standardmatrisen $A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$.

Def. En avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kallas **surjektiv** eller **på** om varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är bild av minst en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Värdeområdet är hela $\mathbb{R}^m$.

Den kallas **injektiv** eller **entydig** om varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är en bild av högst en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ ($T(\mathbf{x}_1) = T(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$).

Sats 1.9.11. Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är T injektiv omm ekvationen $T(\mathbf{x}) = 0$ endast har den triviala lösningen.

Mängden $\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = 0\}$ kallas **kärnan** till T eller **nollrummet** till T ($\ker(T)$ eller $Nul(T)$). Alltså: T är injektiv omm $\ker(T) = 0$.

Bevis. T är injektiv $\Rightarrow$ eftersom $T(0) = 0$ finns inga andra $\mathbf{x}$ som abildas på 0 dvs $T(\mathbf{x}) = 0$ endast har den triviala lösningen $\mathbf{x} = 0$.

Låt $\ker(T) = 0$. Om $T(\mathbf{x}_1) = T(\mathbf{x}_2)$ så $0 = T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2) = (T \text{ är linjär}) = T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ och $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = 0$, dvs $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Därför blir T injektiv.

Sats 1.9.12. Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt A vara standardmatrisen för T . Då gäller

- a) T är surjektiv omm kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$.
- b) T är injektiv omm kolonnerna i A är linjärt oberoende.

Bevis. a) Enligt Sats 4 (kap 1.4) har vi att kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$ omm ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och därmed $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ har minst en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vilket är ekvivalent med att T är surjektiv.

b) Det följer ur Sats 11 att T är injektiv omm ekvationen $T(\mathbf{x}) = 0$ och därmed $A\mathbf{x} = 0$ har endast trivial lösning. Detta händer omm kolonnerna i A är linjärt oberoende.
