CRAMERS REGEL, VOLYM OCH LINJÄRA AVBILDNINGAR

Cramers sats. En kvadratisk linjär ekvationssystem $Ax = b$ har unik lösning omm $\det(A) \neq 0$.

Låt A vara en $n \times n$-matris och låt $b \in \mathbb{R}^n$. Beteckna med $A_i(b)$ den matris som erhålls från A genom att kolonn i ersätts av b.

$A_i(b) = [a_1 \dots \underset{\text{kol } i}{b} \dots a_n]$

Cramers Regel. Antag att A är inverterbar $n \times n$-matris. Låt $b \in \mathbb{R}^n$. Då ges lösningen x till matrisekvationen $Ax = b$ av

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}, i = 1, \dots, n.$$

Bevis. Låt $I_i(x) = [e_1 \dots e_{i-1}\ x\ e_{i+1} \dots e_n]$ (dvs matrisen som erhålls från identitetsmatrisen I genom att kolonn i ersätts av x). Då är

$$\begin{aligned} A \cdot I_i(x) &= [Ae_1 \dots Ae_{i-1}\ Ax\ Ae_{i+1} \dots Ae_n] \\ &= [a_1 \dots a_{i-1}\ b\ a_{i+1} \dots a_n] = A_i(b), \end{aligned}$$

där a_i är $A:s$ kolonn i. Alltså $\det(A)\det(I_i(x)) = \det(A_i(b))$. Eftersom $\det(I_i(x)) = x_i$ (kontrollera!), får vi $x_i = \det(A_i(b))/\det(A)$.

Kolonner av A: $a_1, \dots, a_n$ och kolonner av $n \times n$ identitets matris $I_{n \times n}$: $e_1, \dots, e_n$. Om $Ax = b$

$\Rightarrow \underline{A \cdot I_i(x)} = A[e_1 \dots x \dots e_n] =$

$= Ae_1 \dots Ax \dots Ae_n =$

$= [a_1 \dots b \dots a_n] = \underline{A_i(b)}$

$\det(A) \cdot \underbrace{\det(I_i(x))}_{x_i \text{ - kofaktorexpan som genom rad } i} =$

$= x_i \det(A) = \det A_i(b)$

$= x_i = \dfrac{\det A_i(b)}{\det(A)}$

Ex. nästa sida

Sats 8 (3.3). En formel för inversmatris. Låt A vara en inverterbar matris. Då är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Adjunkten $adj(A)$ till A är matrisen $C^T = (c_{ij})^T$ där $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, A_{ij} är den matris som fås från A genom att strycka rad i och kolonn j.

Bevis. Den j:te kolonnen i A^{-1} är lösningen till ekvationen $Ax = e_j$. Cramers regel ger nu att

$$\text{elementet på position } (i, j) \text{ i } A^{-1} \text{ är } \frac{\det(A_i(e_j))}{\det(A)}.$$

Utveckling av $\det(A_i(e_j))$ efter kolonn i ger att

$$\det(A_i(e_j)) = (-1)^{i+j}\det(A_{ji}) = c_{ji}.$$

Notera ordningen ji som orsakas av att det enda elementen i kolonn i ur $A_i(e_j)$ är en etta i rad j.

Sats 9 (3.3) Determinanten som area och volym

Om A är en 2×2-matris är $|\det(A)|$ arean av parallellogramen som spänns upp av A:s kolonner.

Om A är en 3×3-matris är $|\det(A)|$ volymen av parallellepipeden som spänns upp av A:s kolonner.

$$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5$$
$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

Matrix form $Ax = b$ $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & +2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

Cramers Regel:

$$x_1 = \frac{\det(A_1(b))}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2(b))}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{54}{6} = 9$$

$$x_3 = \frac{\det A_3(b)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{48}{6} = 8$$

det(A)

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3(-6) - 3\cdot 2 + 3\cdot 10 = 6$$

$$\det\begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 5\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot(-6) - 7\cdot 2 + 3\cdot 10 = -14$$

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 3(-19) - 3\cdot(-4) + 3\cdot 41 = 54$$

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3(-20) - 3\cdot 2 + 3\cdot 38 = 48$$

Sat 3.1.2

Sats 10 (3.3). Determinanten som area- eller volymskala.

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $T(x) = Ax$. Om S är ett område i $\mathbb{R}^2$ och $T(S)$ bilden av detta område , så

$$\{\text{area av } T(S)\} = |\det(A)| \cdot \{\text{area av } S\}.$$

Om $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $T(x) = Ax$ och S är ett område i $\mathbb{R}^3$ så

$$\{\text{volym av } T(S)\} = |\det(A)| \cdot \{\text{volym av } S\}.$$

Bevis. Vi gör beviset för parallelogram och respektive parallellepiped S. Låt S vara en parallellogram i $\mathbb{R}^2$ som spänns upp av vektorer $\mathbf{b_1}$ och $\mathbf{b_2}$. Då

$$S = \{s_1\mathbf{b_1} + s_2\mathbf{b_2} : s_1, s_2 \in [0, 1]\}.$$

Bilden av S under avbildningen T består av punkterna

$$T(s_1\mathbf{b_1} + s_2\mathbf{b_2}) = s_1T(\mathbf{b_1}) + s_2T(\mathbf{b_2}) = s_1A\mathbf{b_1} + s_2A\mathbf{b_2},$$

dvs en parallellogram som spänns upp av vektorerna $A\mathbf{b_1}$ och $A\mathbf{b_2}$. Om $B = [\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}]$ så är arean av denna parallellogram

$$\det([A\mathbf{b_1}\ A\mathbf{b_2}]) = \det(AB) = (\text{produktsatsen}) = \det(A)\det(B) = \det(A)\{\text{arean av } S\}.$$

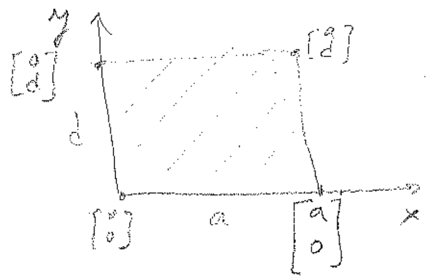
En godtycklig parallellogram är $\mathbf{p}+S$ där S är en parallellogram med ett hörn i origo och p är en vektor. Eftersom T är en linjär avbildning blir bilden av parallellogramen $T(\mathbf{p}) + T(S)$. Klart att förflyttning inte ändrar arean och vi har

$$\{\text{arean av } T(\mathbf{p} + S)\} = \{\text{arean av } T(\mathbf{p}) + T(S)\} =$$
$$\{\text{arean av } T(S)\} = |\det A|\{\text{arean av } S\} = |\det A|\{\text{arean av } \mathbf{p} + S\}$$

Beviset för parallellepiped är liknande.

Exam

1)



$$A = \begin{array}{cc} x & y \\ \hline \end{array}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$$

Arean $x \cdot y = a \cdot d$

2) Beräkna area av en parallellogram med koordinater $\underset{A}{(-2,-2)}$ $\underset{B}{(0,5)}$ $\underset{C}{(4,-1)}$, $\underset{D}{(6,4)}$

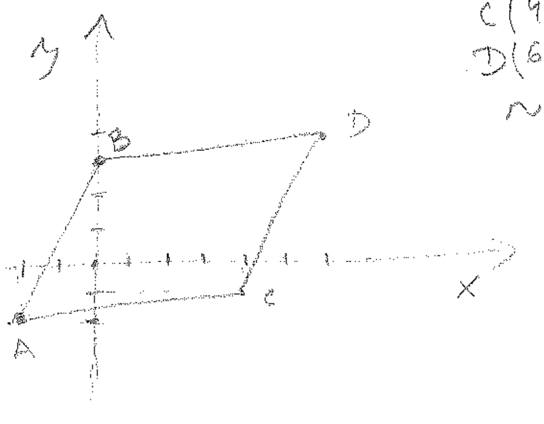
$-2\cdot(-2)$

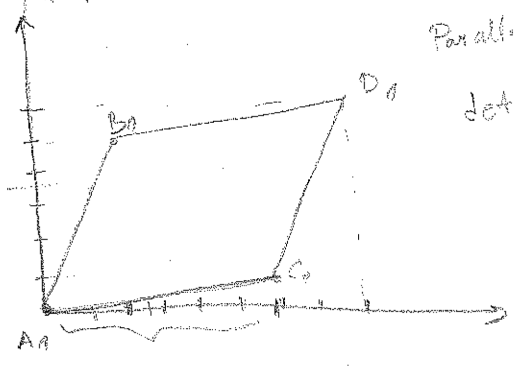
$A(-2,-2) \Rightarrow A_1(0,0)$

$B(0,5) \to B_1(0-(-2), 5-(-2)) \to (2,5)$

$C(4,-1) \to C_1(4-(-2), -1-(-2)) \to (6,1)$

$D(6,4) \to D_1(6-(-2), 4-(-2)) \to (2,6)$

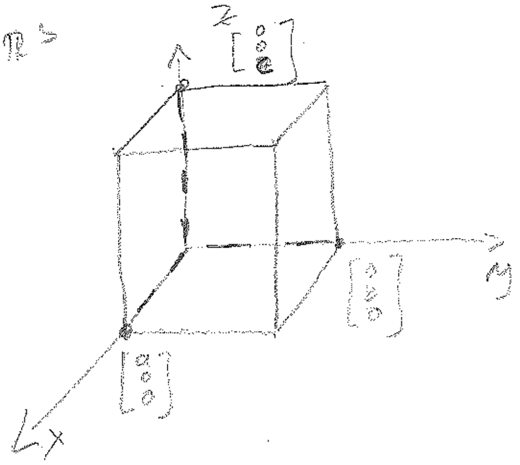




Parall. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$\det|2-30| = |-28| = 28$

Ex $\mathbb{R}^3$



$V = a \cdot b \cdot c$

$\det \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a b \cdot c$

def **Adjungerad matris**

Låt A vara en kvadratisk matris. Transponat av matris med (i,j) element

Låt $A_{i,j}$ vara den matris där vi har tagit bort rad i och kolumn j.

Sats 3.3.8

Låt A vara en inverterbar $n \times n$ matris. Då är:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{n2} \\ \vdots & & \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{nn} \end{bmatrix}, \quad C_{ji} = \cancel{\ } (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

matris där vi har tagit bort rad j och kolumn i

$$\operatorname{adj} A = (C_{ij})^T$$

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -6 \quad C_{12} = -\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = +4 \quad C_{13} = +\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$

$C_{21} = -\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = +1 \quad C_{22} = +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$C_{31} = +\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = -6 \quad C_{32} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 2 \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$$C_{ij} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 8 - (6+4) = -2$$

$$A^{-1} = -2 \begin{vmatrix} -6 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 12 \\ -8 & 2 & -4 \\ -8 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$